

## 7 класс

**Задача 7.1. На пробежке.**

Экспериментатор Иннокентий Иванов вышел с утра на пробежку. Неспеша пробегая по дорожке в парке, он встретил движущуюся навстречу колонну из 10 бегунов. Учёный заметил, что спортсмены пробегают мимо него с интервалом в 2 с. Через некоторое время эта же самая колонна, где-то развернувшись, стала обгонять Иннокентия. В этот раз все спортсмены пробежали мимо учёного в течение 42 с.

1. Каково было расстояние между соседними бегунами в колонне?

2. С какой скоростью бегал Иннокентий по парку, если считать, что она не менялась?

Пообщавшись со спортсменами, учёный выяснил, что скорость их бега всегда равна 18 км/ч, а расстояние между ними в колонне всегда постоянно.

**Ответ:** 1) 14 м; 2) 2 м/с.

**Решение:** Пусть  $v$  — скорость Иннокентия,  $L$  — расстояние между бегунами, а  $u = 18 \text{ км/ч} = 5 \text{ м/с}$  — скорость бега спортсменов. Длина всей колонны, соответственно, равна  $9L$ . Так как при движении колонны навстречу бегуны пробегают мимо учёного с интервалом 2 с,

$$L = (v + u) \cdot 2 \text{ с.}$$

При второй встрече спортсмены пробежали мимо Иннокентия за 42 с, поэтому

$$9L = (u - v) \cdot 42 \text{ с.}$$

Поделим эти уравнения друг на друга и выразим скорость учёного:

$$9 = \frac{42}{2} \cdot \frac{u - v}{v + u} \Rightarrow 9(v + u) = 21(u - v) \Rightarrow 30v = 12u \Rightarrow v = \frac{2u}{5} = 2 \text{ м/с.}$$

Расстояние между бегунами в колонне равно

$$L = (v + u) \cdot 2 \text{ с} = 7 \text{ м/с} \cdot 2 \text{ с} = 14 \text{ м.}$$

**Критерии:**

- 1) Записана формула  $L = (v + u) \cdot 2 \text{ с}$  или её аналог . . . . . 2 балла
- 2) Записана формула  $9L = (u - v) \cdot 42 \text{ с}$  или её аналог . . . . . 3 балла
- 3) Найдена скорость Иннокентия  $v$  . . . . . 3 балла
- 4) Найдено расстояние между бегунами  $L$  . . . . . 2 балла

**Указание проверяющим:** Если участник записал длину колонны как  $10L$  и произвёл верный расчёт  $v$  и/или  $L$  в этом случае, то за пункт 2 баллы не ставятся, а пункты 3 и 4 оцениваются независимо. Для контроля, при длине в  $10L$  должно получаться  $v \approx 1,8 \text{ м/с}$  и  $L \approx 13,5 \text{ м}$ .

**Задача 7.2. Бабушкин подарок.**

Однажды бабушка прислала Карлсону три банки варенья — две больших (одинаковых между собой) и одну маленькую (вдвое меньшего объёма). Пригласив в гости Малыша, Карлсон решил съесть подарок, дав гостю маленькую банку, а себе оставил обе большие. Варенье из своей банки Малыш первую треть времени ел со скоростью 4 ложки в минуту, оставшееся время — со скоростью 2,5 ложки в минуту. С какой скоростью Карлсон поглощал содержимое второй большой банки, если первую банку он съел со скоростью 10 ложек в минуту, а начали и закончили друзья в одно и то же время? Количество варенья в каждой ложке у обоих друзей считать одинаковым.

**Ответ:** 15 ложек в минуту.

**Решение:** Пусть  $V$  — ёмкость третьей банки (банки Малыша) в ложках, а  $t$  — время, в течение которого варенье было съедено. Тогда

$$V = 4 \frac{\text{лож}}{\text{мин}} \cdot \frac{t}{3} + 2,5 \frac{\text{лож}}{\text{мин}} \cdot \frac{2t}{3} = 3 \frac{\text{лож}}{\text{мин}} \cdot t.$$

Ёмкость обеих банок Карлсона равна  $2V$ . Время, за которое он съел содержимое первой, равно

$$t_1 = \frac{2V}{10 \frac{\text{лож}}{\text{мин}}} = \frac{2 \cdot 3 \frac{\text{лож}}{\text{мин}} \cdot t}{10 \frac{\text{лож}}{\text{мин}}} = 0,6t.$$

Следовательно, на вторую банку ушло время, равное

$$t_2 = t - t_1 = 0,4t.$$

Так как время уменьшилось в 1,5 раза при том же объёме варенья, скорость поедания Карлсоном второй банки равна  $1,5 \times 10 \frac{\text{лож}}{\text{мин}} = 15 \frac{\text{лож}}{\text{мин}}$ .

**Критерии:**

- 1) Записано выражение для объёма, съеденного Малышом, через доли времени (или его аналог) . . . . . 3 балла
- 2) Записано выражение для времени  $t_1$  через  $V$  и скорость (либо аналогичное равенство) . . . . . 2 балла
- 3) Найдено время  $t_1$ , выраженное через  $t$  (либо аналогичное равенство) . . . . . 2 балла
- 4) Найдено время  $t_2$  . . . . . 1 балл
- 5) Найдена скорость поедания второй банки Карлсоном . . . . . 2 балла

*Указание проверяющим:* Все величины не обязательно могут быть выражены через общее время  $t$  (как в авторском решении), его роль в решении учащегося может играть другой параметр. В пунктах 1 и 3 критериев, в этом случае, необходимо заменить  $t$  на параметр, использованный учащимся.

**Задача 7.3. Угощение для брата.**

Пока семиклассника Паши не было дома, его младшая сестра Ариша решила сделать брату сюрприз и слепила из пластилина два пирожных, совершенно **одинаковых по размеру**, но с разными «начинками». В одно из них она положила два стальных, а в другое — три стеклянных шарика. Узнав об этом, Паша взвесил оба пирожных и выяснил, что их массы равны 30 г и 47 г.

1. Чему равна плотность пластилина, который использовала Ариша?

2. Каков объём одного пирожного?

Паша помнил, что размеры всех шариков одинаковы, а масса стального шарика равна 13 г. Плотность стали равна 7800 кг/м<sup>3</sup>, плотность стекла — 2400 кг/м<sup>3</sup>.

**Ответ:** 1) 1800 кг/м<sup>3</sup>; 2) 15 см<sup>3</sup>.

**Решение:** Два стальных шарика тяжелее, чем три стеклянных того же объёма, поэтому пирожное со стальной «начинкой» имеет массу 47 г, а со стеклянной — 30 г.

Два стальных шарика имеют массу 26 г, следовательно, оставшийся 21 г приходится на пластилин. Запишем выражение для объёма пирожного:

$$V = \frac{26 \text{ г}}{7,8 \text{ г/см}^3} + \frac{21 \text{ г}}{\rho_{\text{пл}}}.$$

Масса стеклянного шарика равна

$$m_{\text{стек}} = \frac{13 \text{ г}}{7,8 \text{ г/см}^3} \cdot 2,4 \text{ г/см}^3 = 4 \text{ г}.$$

Поэтому во втором пирожном масса пластилина составляет 30 г — 3 · 4 г = 18 г. Объём такого пирожного равен

$$V = \frac{12 \text{ г}}{2,4 \text{ г/см}^3} + \frac{18 \text{ г}}{\rho_{\text{пл}}}.$$

Приравнивая, получаем

$$\frac{26 \text{ г}}{7,8 \text{ г/см}^3} + \frac{21 \text{ г}}{\rho_{\text{пл}}} = \frac{12 \text{ г}}{2,4 \text{ г/см}^3} + \frac{18 \text{ г}}{\rho_{\text{пл}}} \Rightarrow \rho_{\text{пл}} = 1,8 \text{ г/см}^3.$$

Объём пирожного, соответственно, будет равен

$$V = \frac{12 \text{ г}}{2,4 \text{ г/см}^3} + \frac{18 \text{ г}}{1,8 \text{ г/см}^3} = 15 \text{ см}^3.$$

**Критерии:**

- 1) Найдена масса стеклянного шарика . . . . . 1 балл
- 2) Найдена масса пластилина в обоих случаях . . . . . 2 балла
- 3) Записано верное уравнение для нахождения  $\rho_{\text{пл}}$  (или  $V$ ) . . . . . 3 балла
- 4) Найдено значение плотности пластилина  $\rho_{\text{пл}}$  . . . . . 2 балла
- 5) Найден значение объёма пирожного  $V$  . . . . . 2 балла

**Задача 7.4. Дальномер.**

На выходных учёный Лосяш решил поэкспериментировать. Для этого он взял сосуд с вертикальными стенками, налил туда воду и поместил на некотором расстоянии от её поверхности вертикальный цилиндр. На поверхности цилиндра Лосяш закрепил электронный дальномер, который определяет расстояние  $h$  до поверхности воды (схема установки изображена на рис. 7.1а). Учёный стал медленно и с постоянной скоростью опускать цилиндр до тех пор, пока тот не упёрся в дно сосуда. Снимая показания дальномера, Лосяш получил график зависимости  $h$  от времени (рис. 7.1б). Определите **по графику**:

1. высоту слоя воды  $H$  и расстояние  $l$  от её поверхности до верхнего края сосуда в начале эксперимента;

2. отношение площади дна сосуда к площади сечения поршня.

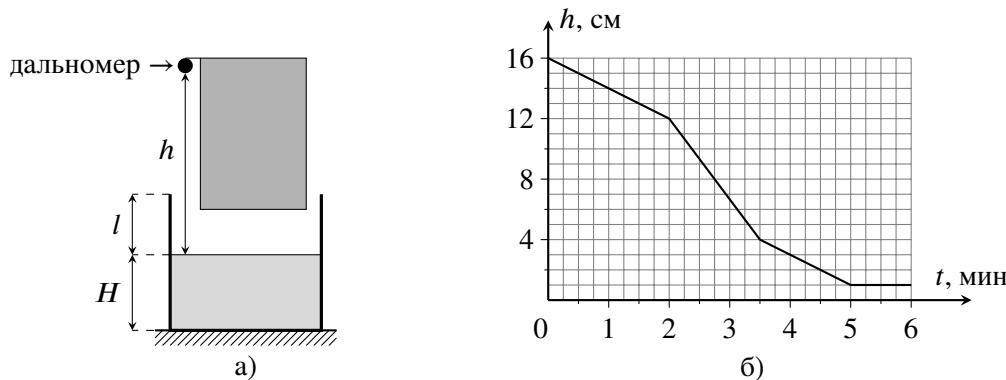


Рис. 7.1.

**Ответ:** 1)  $H = 6$  см,  $l = 5$  см; 2) 1,6.

**Решение:** Первый участок графика соответствует движению поршня до контакта с водой. Найдём скорость движения поршня:  $v = (16 \text{ см} - 12 \text{ см})/(2 \text{ мин}) = 2 \text{ см/мин}$ . Второй участок соответствует движению поршня в воде, когда уровень вытесняемой воды поднимается вверх. На третьем участке скорость снова равна  $v$ , значит здесь уровень воды достиг края сосуда, и вытесняемая жидкость просто выливается наружу. Четвёртый (горизонтальный) участок показывает, что в этом случае поршень дошёл до дна сосуда и остановился.

От момента касания поверхности воды до контакта с дном поршень двигался в течение  $5 \text{ мин} - 2 \text{ мин} = 3 \text{ мин}$ . Поэтому начальная высота слоя воды в сосуде равна  $H = v \cdot 3 \text{ мин} = 2 \text{ см/мин} \cdot 3 \text{ мин} = 6 \text{ см}$ . Высота дальномера над нижним краем поршня равна значению  $h$  в момент касания воды (при  $t = 2 \text{ мин}$ ), то есть эта высота составляет 12 см. Когда поршень упёрся в дно сосуда,  $h = 1 \text{ см}$ , а уровень воды совпадает с верхним краем сосуда. Следовательно, вся высота сосуда равна  $12 \text{ см} - 1 \text{ см} = 11 \text{ см}$ . Расстояние  $l$  от начального положения поверхности жидкости до края сосуда составляет  $l = 11 \text{ см} - H = 11 \text{ см} - 6 \text{ см} = 5 \text{ см}$ .

Пусть  $S_1$  — площадь сечения поршня, а  $S_2$  — площадь дна сосуда. Поднятие воды до краёв происходит за  $3,5 \text{ мин} - 2 \text{ мин} = 1,5 \text{ мин}$ . Опустившийся поршень вытесняет объём  $V = S_1 \cdot v \cdot 1,5 \text{ мин} = 3 \text{ см} \cdot S_1$ . Он же заполняет пространство вокруг поршня до краёв сосуда,  $V = (S_2 - S_1)l = 5 \text{ см} \cdot (S_2 - S_1)$ . Приравнивая, получаем

$$3 \text{ см} \cdot S_1 = 5 \text{ см} \cdot (S_2 - S_1) \Rightarrow S_2/S_1 = 8/5 = 1,6.$$

**Критерии:**

- 1) Найдена скорость опускания поршня . . . . . 2 балла
- 2) Найдена начальная высота воды  $H$  . . . . . 2 балла
- 3) Найдена расстояние  $l$  . . . . . 2 балла
- 4) Записано верное уравнение, связывающее  $S_1$  и  $S_2$  . . . . . 3 балла
- 5) Найдено отношение площадей . . . . . 1 балл

**Указание проверяющим:** 1) В пункте 4 уравнение также может быть получено, например, путём нахождения скорости сближения жидкости и датчика (по второму участку графика и теоретически). Найденное уравнение, если оно верно, оценивать полным баллом за п.4.

2) В пункте 5 допустимо нахождение учащимся обратного отношения площадей  $S_1/S_2 = 5/8$ . Балл за это не снимать.

3) Расчёты, основанные на измерениях, проделанных по рис. 7.1а (не по графику), не оценивать!

## 8 класс

**Задача 8.1. Марафонцы.**

Крош, Ёжик и Бараш соревнуются в беге на длинную дистанцию. Судья Лосяш зафиксировал, что Крош прибежал к финишу в 14:00, Бараш — в 14:20, а Ёжик — в 15:00. Во сколько стартовали Смешарики, если средняя скорость Бараша равнялась 15 км/ч, а Ёжика — 12 км/ч? Какова средняя скорость Кроша? Все герои стартовали одновременно и бежали по одной дороге.

**Ответ:** в 11:40,  $\approx 17$  км/ч.

**Решение:** Пусть  $L$  — длина дистанции. Тогда Крош её пробежит за время  $t_K = L/v_K$ , Бараш — за  $t_B = L/(15 \text{ км/ч})$ , а Ёжик — за  $t_E = L/(12 \text{ км/ч})$ . Ёжик прибежал на  $2/3$  часа позже Бараша, поэтому

$$\frac{2}{3} \text{ ч} = \frac{L}{12 \text{ км/ч}} - \frac{L}{15 \text{ км/ч}} \quad \Rightarrow \quad L = 40 \text{ км.}$$

Это значит, что, например, Бараш бежал в течение

$$t_B = \frac{40 \text{ км}}{15 \text{ км/ч}} = \frac{8}{3} \text{ ч} = 2 \text{ ч } 40 \text{ мин.}$$

Следовательно, забег начался в 11:40.

Крош бежал  $2 \text{ ч } 20 \text{ мин} = 7/3 \text{ ч}$ . Его скорость была равна

$$v_K = \frac{40 \text{ км}}{7/3 \text{ ч}} \approx 17 \text{ км/ч.}$$

**Критерии:**

- 1) Записано уравнение для нахождения  $L$  . . . . . 3 балла
- 2) Найдена длина дистанции  $L$  . . . . . 1 балл
- 3) Найдено время старта . . . . . 3 балла
- 4) Найдена скорость Кроша . . . . . 3 балла

**Задача 8.2. Физика на YouTube.**

Пытаясь повторить опыт, увиденный в Интернете, экспериментатор Иннокентий Иванов положил в калориметр некоторое количество снега при температуре  $-20^{\circ}\text{C}$  и налил туда же ртуть при  $+25^{\circ}\text{C}$ . В результате весь снег в калориметре растаял, в нём установилась температура  $0^{\circ}\text{C}$ , а объём содержимого калориметра стал в три раза больше, чем первоначальный объём снега. Какова была средняя плотность снега, взятого учёным? Удельная теплоёмкость льда равна  $2100 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^{\circ}\text{C})$ , ртути —  $140 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^{\circ}\text{C})$ , удельная теплота плавления льда —  $330 \text{ кДж}/\text{кг}$ , плотность воды —  $1000 \text{ кг}/\text{м}^3$ , плотность ртути —  $13600 \text{ кг}/\text{м}^3$ . В рассматриваемом диапазоне температур ртуть является жидкостью. Тепловыми потерями и теплоёмкостью калориметра пренебречь.

*Примечание:* Снег состоит из кристалликов льда, между которыми есть воздушные полости.

**Ответ:**  $340 \text{ кг}/\text{м}^3$ .

**Решение:** Пусть  $V$  — начальный объём снега в калориметре, а  $\rho_{\text{сн}}$  — его плотность. Тогда масса снега равна  $m = \rho_{\text{сн}}V$ . Снег, превратившись в воду, будет иметь объём  $V_{\text{в}} = m/\rho_{\text{в}} = \rho_{\text{сн}}/\rho_{\text{в}} \cdot V$ , поэтому объём ртути, налитой в калориметр, будет равен

$$V_{\text{рт}} = 3V - V_{\text{в}} = \left(3 - \frac{\rho_{\text{сн}}}{\rho_{\text{в}}}\right) \cdot V.$$

Запишем уравнение теплового баланса

$$\begin{aligned} c_{\text{л}}m(0^{\circ}\text{C} - (-20^{\circ}\text{C})) + \lambda m = c_{\text{рт}}\rho_{\text{рт}}V_{\text{рт}}(25^{\circ}\text{C} - 0^{\circ}\text{C}) &\Rightarrow (c_{\text{л}} \cdot 20^{\circ}\text{C} + \lambda)\rho_{\text{сн}}V = c_{\text{рт}}\rho_{\text{рт}} \left(3 - \frac{\rho_{\text{сн}}}{\rho_{\text{в}}}\right) \cdot V \cdot 25^{\circ}\text{C} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (c_{\text{л}} \cdot 20^{\circ}\text{C} + \lambda)\rho_{\text{сн}} = c_{\text{рт}}\rho_{\text{рт}} \left(3 - \frac{\rho_{\text{сн}}}{\rho_{\text{в}}}\right) \cdot 25^{\circ}\text{C} \end{aligned}$$

и выразим отсюда плотность снега

$$\rho_{\text{сн}} = \frac{3c_{\text{рт}}\rho_{\text{рт}} \cdot 25^{\circ}\text{C}}{c_{\text{л}} \cdot 20^{\circ}\text{C} + \lambda + c_{\text{рт}} \cdot 25^{\circ}\text{C} \cdot \rho_{\text{рт}}/\rho_{\text{в}}} \approx 340 \text{ кг}/\text{м}^3.$$

**Критерии:**

- 1) Записано верное уравнение теплового баланса . . . . . 2 балла
- 2) Найден объём ртути, налитой в калориметр . . . . . 3 балла
- 3) Получено верное выражение для плотности снега через данные из условия задачи . . . . . 3 балла
- 4) Найдено числовое значение плотности снега . . . . . 2 балла

*Указание проверяющим:* Пункт 1 оценивается полным баллом, даже если масса ртути не расписана как произведение плотности на объём.

**Задача 8.3. Стержень в стене.**

Однородный прямой стержень длиной 1 м вставлен на глубину 20 см в горизонтальное отверстие вертикальной стены толщиной 10 см (рис. 8.1). Если к правому концу стержня подвесить груз 2 кг, стержень будет давить на правый край отверстия (точку  $A$ ) с силой 280 Н.

- Чему равна масса стержня?
- С какой силой стержень будет давить в точке  $A$ , если груз перевесить на левый конец стержня (с противоположной стороны стены)?

Отверстие считать гладким и имеющим высоту, чуть превышающую толщину стержня. Ускорение свободного падения принять равным 10 Н/кг.

**Ответ:** 1) 2,5 кг; 2) 80 Н.

**Решение:** 1. Пусть  $M$  — масса стержня, а  $m$  — масса груза. Рассмотрим первый случай, когда груз висит на правой конце стержня. Стержень взаимодействует со стеной в двух точках: в точке  $A$ , где на него действует сила  $N_1$ , направленная вверх, и в точке  $B$ , где на него действует сила  $N_2$ , направленная вниз. Изобразим остальные силы (рис. 8.2а) — силу тяжести  $Mg$ , приложенную в центр (точку  $C$ ), и вес груза (в точке  $D$ ). Запишем правило моментов относительно точки  $B$ :

$$N_1 \cdot AB = Mg \cdot BC + mg \cdot BD.$$

Подставляя  $AB = 10$  см,  $BC = 40$  см,  $BD = 90$  см и  $N_1 = 280$  Н, получаем

$$N_1 \cdot 10 \text{ см} = Mg \cdot 40 \text{ см} + mg \cdot 90 \text{ см} \Rightarrow M = \frac{N_1}{4g} - \frac{9m}{4} = \frac{280 \text{ Н}}{4 \cdot 10 \text{ Н/кг}} - \frac{9 \cdot 2 \text{ кг}}{4} = 2,5 \text{ кг}.$$

2. Во втором случае груз висит на левом конце стержня (точка  $E$ ), а силы взаимодействия со стенкой меняются на  $N'_1$  и  $N'_2$  соответственно (рис. 8.2б). Запишем снова правило моментов относительно точки  $B$  и найдём  $N'_1$ :

$$N'_1 \cdot AB + mg \cdot BE = Mg \cdot BC \Rightarrow N'_1 = \frac{Mg \cdot BC - mg \cdot BE}{AB} = \frac{25 \text{ Н} \cdot 40 \text{ см} - 20 \text{ Н} \cdot 10 \text{ см}}{10 \text{ см}} = 80 \text{ Н}.$$

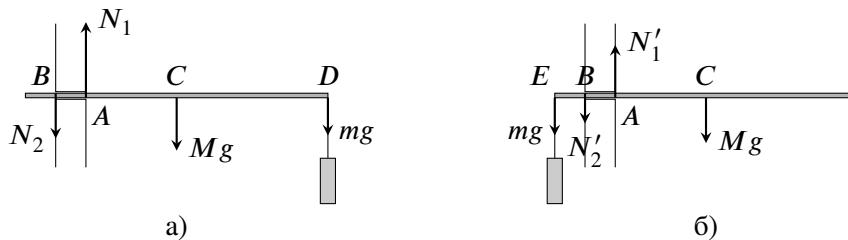


Рис. 8.2.

**Критерии:**

- Корректно изображены силы, действующие на стержень в первом случае . . . . . 1 балл
- Записано правило моментов в первом случае относительно точки  $B$  . . . . . 3 балла
- Найдена масса стержня . . . . . 1 балл
- Корректно изображены силы, действующие на стержень во втором случае . . . . . 1 балл
- Записано правило моментов во втором случае относительно точки  $B$  . . . . . 3 балла
- Найдена сила  $N'_1$  . . . . . 1 балл

**Указание проверяющим:** Если учащийся пишет правило моментов относительно какой-либо другой точки (не  $B$ ), то для каждого случая (пункты 2 и 5) верно записанное правило моментов оценивается в 2 балла, а верно записанное условие равенства равнодействующей сил нулю (или второе правило моментов) — 1 баллом.

**Задача 8.4. Пара ареометров.**

В двух мерных сосудах находятся одинаковые объёмы различных жидкостей: воды и какой-то неизвестной жидкости X. Мальчик Паша решил измерить плотность второй жидкости с помощью ареометра. К сожалению, оказалось, что все ареометры, имевшиеся в школьной лаборатории, разного размера, и у всех них стёрта шкала. Паша не растерялся, взял два прибора, погрузил один из них в воду, второй в жидкость X (рис. 8.3а), а потом поменял их местами (рис. 8.3б). Используя рисунки, определите массы обоих ареометров и плотность жидкости X. Плотность воды равна  $1000 \text{ кг/м}^3$ . Для удобства первый и второй ареометры помечены на рисунках, соответственно, цифрами 1 и 2.

*Примечание:* Ареометр — прибор для измерения плотности жидкости.

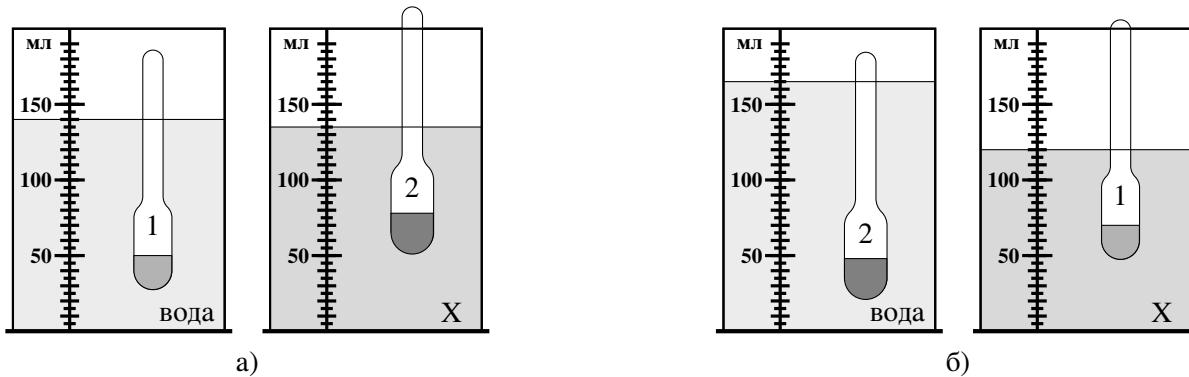


Рис. 8.3.

**Ответ:**  $m_1 = 50 \text{ г}$ ,  $m_2 = 75 \text{ г}$ ,  $\rho_X = 1,67 \text{ г/см}^3$ .

**Решение:** Пусть  $m_1$  — масса первого ареометра,  $m_2$  — масса второго, а  $V_0$  — начальный объём жидкостей. Из условия плавания следует, что объём погруженной в жидкость части ареометра равен отношению массы прибора к плотности жидкости. Отсюда, используя рисунки, получим, что

$$(a) \quad 140 \text{ см}^3 = V_0 + \frac{m_1}{\rho_B}, \quad 135 \text{ см}^3 = V_0 + \frac{m_2}{\rho_X}$$

$$(b) \quad 165 \text{ см}^3 = V_0 + \frac{m_2}{\rho_B}, \quad 120 \text{ см}^3 = V_0 + \frac{m_1}{\rho_X} \quad (8.4.1)$$

Вычитаем друг из друга левые и правые уравнения:

$$25 \text{ см}^3 = \frac{m_2 - m_1}{\rho_B}, \quad 15 \text{ см}^3 = \frac{m_2 - m_1}{\rho_X}.$$

Отсюда находим, что  $m_2 - m_1 = \rho_B \cdot 25 \text{ см}^3 = 25 \text{ г}$  и

$$\frac{\rho_X}{\rho_B} = \frac{25 \text{ см}^3}{15 \text{ см}^3} \approx 1,67 \quad \Rightarrow \quad \rho_X = 1,67 \text{ г/см}^3.$$

Вычитаем теперь друг из друга левое верхнее и правое нижнее уравнения:

$$20 \text{ см}^3 = m_1 \left( \frac{1}{\rho_B} - \frac{1}{\rho_X} \right) \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{20 \text{ см}^3}{\frac{1}{1 \text{ г/см}^3} - \frac{1}{1,67 \text{ г/см}^3}} = 50 \text{ г.}$$

Соответственно,  $m_2 = 75 \text{ г}$ .

**Критерии:**

- 1) Записаны соотношения (8.4.1) или их аналоги . . . по 1 баллу за каждое соотношение (максимум — 4 балла)
- 2) Найдены массы ареометров . . . . . 3 балла
- 3) Найдена плотность неизвестной жидкости . . . . . 3 балла

*Указание проверяющим:* Если верно найдена масса только одного прибора, за пункт 2 ставить 1 балл из трёх.

## 9 класс

**Задача 9.1. Челночный бег.**

Школьники Паша и Миша сдавали на физкультуре норматив по челночному бегу — каждому из них нужно было как можно быстрее пробежать определённую короткую дистанцию в прямом и обратном направлении в общей сложности 10 раз (5 раз туда и 5 раз обратно). Паша умеет разгоняться с ускорением  $a$  и тормозить с ускорением  $3a$  (по модулю). Миша — спортсмен, он разгоняется с ускорением  $2a$  и тормозит с ускорением  $5a$ . За какое время Паша выполнит упражнение, если Миша его выполняет за 28 с?

**Ответ:**  $\approx 38,6$  с.

**Решение:** Пусть  $L$  — длина одного отрезка дистанции (всего надо пробежать десять таких отрезков). Вначале Паша разгоняется с ускорением  $a$  в течение времени  $t_1$ , а затем тормозит с ускорением  $3a$  в течение времени  $t_2$ . Максимальная скорость Паши равна  $v = at_1$ , поэтому

$$0 - v = -3at_2 \Rightarrow at_1 = 3at_2 \Rightarrow t_1 = 3t_2.$$

С другой стороны,

$$L = \frac{at_1^2}{2} + vt_2 - \frac{3at_2^2}{2} = \frac{at_1^2}{2} + \frac{3at_2^2}{2} = 6at_2^2.$$

Отсюда получаем, что время, которое потратит Паша на выполнение всего упражнения, равно

$$T_{\Pi} = 10(t_1 + t_2) = 40t_2 = 40\sqrt{\frac{L}{6a}}.$$

Проделаем аналогичные вычисления для случая Миши:

$$2at'_1 = 5at'_2 \Rightarrow t'_1 = 2,5t'_2.$$

$$T_M = 28 \text{ с} \Rightarrow 10(t'_1 + t'_2) = 35t'_2 = 28 \text{ с} \Rightarrow t'_2 = 0,8 \text{ с.}$$

$$L = \frac{2a(t'_1)^2}{2} + \frac{5a(t'_2)^2}{2} = \frac{35a(t'_2)^2}{4} = 5,6 \text{ с}^2 \cdot a.$$

Подставляя полученную формулу для  $L$ , находим, что

$$T_{\Pi} = 40\sqrt{\frac{5,6 \text{ с}^2 \cdot a}{6a}} = 40 \text{ с} \cdot \sqrt{\frac{5,6}{6}} \approx 38,6 \text{ с.}$$

**Критерии:**

- 1) Найдено, что  $t_1 = 3t_2$ , или аналогичное этому соотношение (случай Паши) . . . . . 1 балл
- 2) Записано, что  $T_{\Pi} = 10(t_1 + t_2)$ , или аналог этого . . . . . 1 балл
- 3) Найдена связь между  $L$ ,  $a$  и  $t_1$  (или  $t_2$ , или  $T_{\Pi}$ ) в случае Паши . . . . . 2 балла
- 4) Найдено, что  $t'_1 = 2,5t'_2$ , или аналогичное этому соотношение (случай Миши) . . . . . 1 балл
- 5) Найдено значение  $t'_1$  и/или  $t'_2$  . . . . . 1 балл
- 6) Найдена связь между  $L$ ,  $a$  и  $t'_1$  (случай Миши) . . . . . 2 балла
- 7) Найдено значение для  $T_{\Pi}$  . . . . . 2 балла

*Указание проверяющим:* Учащийся может сразу связать  $L$ ,  $a$  и  $T_M$  для случая Миши. Любой корректный вариант оценивается полным баллом за пункты 5 и 6.

**Задача 9.2. Хитрый план.**

Мальчик Паша решил измерить плотность неизвестной жидкости с помощью ареометра. Однако у мальчика этой жидкости было мало, поэтому он налил в цилиндрический сосуд воды, сверху долил слой исследуемой жидкости и поместил туда прибор. Ареометр показал значение  $0,93 \text{ г/см}^3$  (см. рис. 9.1). Удивившись, Паша повторил опыт, заменив слой неизвестной жидкости на слой керосина той же высоты. В этом случае прибор показал  $0,95 \text{ г/см}^3$ . Помогите Паше и определите плотность неизвестной жидкости. Плотность керосина равна  $800 \text{ кг/м}^3$ , плотность воды —  $1000 \text{ кг/м}^3$ . Площадь сечения измерительной части прибора считать постоянной.

**Примечание:** Ареометр — прибор для измерения плотности жидкости, в верхней, узкой части которого находится шкала. Плотность, показываемая прибором, определяется как отношение массы ареометра к объёму **всей** его погруженной части.

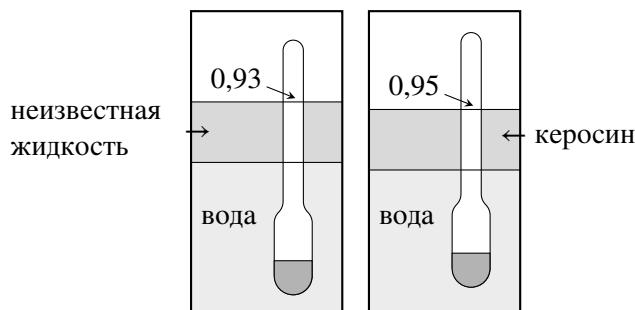


Рис. 9.1.

**Ответ:**  $0,714 \text{ г/см}^3$ .

**Решение:** Пусть  $m$  — масса ареометра,  $\rho_X$  — плотность неизвестной жидкости, а  $V$  — объём узкой части прибора, погруженный в верхнюю жидкость. В первом случае объём всей погруженной части равен  $V_1 = m/(0,93 \text{ г/см}^3)$ , а во втором —  $V_2 = m/(0,95 \text{ г/см}^3)$ . Запишем условия плавания ареометра в каждом случае:

$$mg = \rho_X g V + \rho_B g \left( \frac{m}{0,93 \text{ г/см}^3} - V \right) \Rightarrow m \left( \frac{1}{0,93} - 1 \right) = (1 \text{ г/см}^3 - \rho_X) V \quad (\text{сверху неизвестная жидкость}),$$

$$mg = \rho_K g V + \rho_B g \left( \frac{m}{0,95 \text{ г/см}^3} - V \right) \Rightarrow m \left( \frac{1}{0,95} - 1 \right) = (1 \text{ г/см}^3 - 0,8 \text{ г/см}^3) V \quad (\text{сверху керосин}).$$

Поделим эти полученные уравнения друг на друга:

$$\frac{1 \text{ г/см}^3 - \rho_X}{0,2 \text{ г/см}^3} = \frac{1/0,93 - 1}{1/0,95 - 1} \Rightarrow \rho_X = 1 \text{ г/см}^3 - \frac{7 \cdot 0,95}{5 \cdot 0,93} \cdot 0,2 \text{ г/см}^3 \approx 0,714 \text{ г/см}^3.$$

**Критерии:**

- 1) Записано выражение для объёма погруженной части в обоих случаях . . . . . 2 балла
- 2) Записано условие плавания ареометра в первом случае . . . . . 2 балла
- 3) Записано условие плавания ареометра во втором случае . . . . . 2 балла
- 4) Записано уравнение для нахождения  $\rho_X$  . . . . . 2 балла
- 5) Найдено значение плотности неизвестной жидкости . . . . . 2 балла

**Указания проверяющим:** 1) Если оба выражения для объёма погруженной части написаны сразу внутри условия плавания, то пункт 1 оценивается полным баллом.

2) Уравнение в пункте 4 должно содержать только известные величины и/или числовые значения.

**Задача 9.3. Ох уж это электричество!**

Готовясь к экспериментальному туру олимпиады по физике, девочка Карина собрала цепь, состоящую из двух разных вольтметров, двух резисторов и идеального источника постоянного напряжения (рис. 9.2а). Уже списав показания приборов ( $U_1 = 0,9$  В,  $U_2 = 1,8$  В), девочка поняла, что допустила ошибку и пересобрала цепь (рис. 9.2б). В этом случае первый вольтметр показал  $U'_1 = 5$  В, а второй —  $U'_2 = 4$  В. Чему равно сопротивление  $R_2$ , если  $R_1 = 3$  кОм?

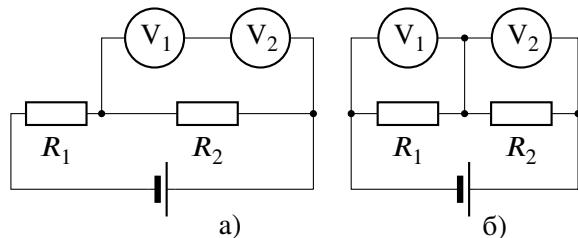


Рис. 9.2.

**Ответ:** 1,5 кОм.

**Решение:** Из показаний вольтметров в первом эксперименте следует, что сопротивление второго вдвое больше сопротивления первого:  $R_{V1} = r$ ,  $R_{V2} = 2r$ . Показания приборов во втором эксперименте говорят, что напряжение на источнике равно  $U'_1 + U'_2 = 9$  В.

Рассмотрим первую цепь. Напряжение на резисторе  $R_1$  там равно 9 В – 2,7 В = 6,3 В. Сила тока, текущего через него, равна суммарной силе тока, текущей через вольтметры и  $R_2$ :

$$\frac{6,3 \text{ В}}{R_1} = 2,7 \text{ В} \cdot \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{3r} \right) \Rightarrow \frac{7}{R_1} = \frac{3}{R_2} + \frac{1}{r}. \quad (9.3.1)$$

Теперь запишем условие равенства суммарных токов через пары вольтметр-резистор во второй цепи:

$$5 \text{ В} \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{r} \right) = 4 \text{ В} \cdot \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{2r} \right) \Rightarrow \frac{5}{R_1} + \frac{5}{r} = \frac{4}{R_2} + \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{5}{R_1} + \frac{3}{r} = \frac{4}{R_2}. \quad (9.3.2)$$

Исключая из полученных уравнений сопротивление вольтметра  $r$ , получим

$$\frac{5}{R_1} + 3 \cdot \left( \frac{7}{R_1} - \frac{3}{R_2} \right) = \frac{4}{R_2} \Rightarrow \frac{26}{R_1} = \frac{13}{R_2} \Rightarrow R_2 = \frac{R_1}{2} = 1,5 \text{ кОм.}$$

**Критерии:**

- 1) Найдено соотношение между сопротивлениями вольтметров . . . . . 1 балл
- 2) Найдено напряжение источника . . . . . 1 балл
- 3) Записано условие равенства токов для первой цепи (9.3.1) или его аналог . . . . . 3 балла
- 4) Записано условие равенства токов для второй цепи (9.3.2) или его аналог . . . . . 3 балла
- 5) Найдено значение  $R_2$  . . . . . 2 балла

**Задача 9.4. Больше и меньше.**

Девочка Маша взяла из морозилки кусок льда при  $-30^{\circ}\text{C}$ , положила его на дно калориметра и, чтобы лёд не всплывал, накрыла сверху тонкой сеткой. Затем она налила в калориметр 120 г воды при  $+15^{\circ}\text{C}$ . После установления теплового равновесия оказалось, что уровень воды понизился. Девочка повторила свой опыт, взяв такой же по массе кусок льда и налив то же самое количество воды, но уже при температуре  $+5^{\circ}\text{C}$ . Когда снова установилось равновесие, Маша обнаружила, что на этот раз уровень воды повысился. Каковы стали конечные массы льда в обоих опытах, если изменение уровня воды (по величине) в них было одинаковым, а установившаяся температура оба раза была  $0^{\circ}\text{C}$ . Стенки калориметра считать вертикальными, вода в эксперименте полностью покрывает лёд. Тепловыми потерями, теплоёмкостью калориметра и сетки пренебречь. Удельная теплоёмкость воды равна 4200  $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C})$ , льда — 2100  $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C})$ , удельная теплота плавления льда — 330  $\text{кДж}/\text{кг}$ .

**Ответ:** 72,4 г и 87,6 г.

**Решение:** Уровень воды изменяется из-за того, что часть льда превращается в воду (или, наоборот, вода превращается в лёд). Изменение объёма связано с изменением плотности и зависит от массы вещества, испытывающего переход ( $\Delta V = m/\rho_{\text{л}} - m/\rho_{\text{в}}$ ). Поэтому, так как уровень в обоих экспериментах меняется на одну и ту же величину, масса растаявшего льда в первом случае и масса замёрзшей воды во втором равны между собой.

Пусть эта масса равна  $m$ , а начальная масса льда —  $M$ . Запишем уравнение теплового баланса для обоих случаев:

$$c_{\text{л}}M \cdot 30^{\circ}\text{C} + \lambda m = c_{\text{в}} \cdot 0,12 \text{ кг} \cdot 15^{\circ}\text{C} \quad (\text{первый опыт}),$$

$$c_{\text{л}}M \cdot 30^{\circ}\text{C} = c_{\text{в}} \cdot 0,12 \text{ кг} \cdot 5^{\circ}\text{C} + \lambda m \quad (\text{второй опыт}).$$

Складывая эти уравнения, получаем

$$2c_{\text{л}}M \cdot 30^{\circ}\text{C} = c_{\text{в}} \cdot 0,12 \text{ кг} \cdot 20^{\circ}\text{C} \Rightarrow M = \frac{c_{\text{в}} \cdot 0,12 \text{ кг} \cdot 20^{\circ}\text{C}}{2c_{\text{л}} \cdot 30^{\circ}\text{C}} = \frac{4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C}) \cdot 0,12 \text{ кг} \cdot 20^{\circ}\text{C}}{2 \cdot 2100 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C}) \cdot 30^{\circ}\text{C}} = 0,08 \text{ кг}.$$

Найдём теперь массу  $m$ :

$$m = \frac{c_{\text{в}} \cdot 0,12 \text{ кг} \cdot 15^{\circ}\text{C} - c_{\text{л}}M \cdot 30^{\circ}\text{C}}{\lambda} = \frac{4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C}) \cdot 0,12 \text{ кг} \cdot 15^{\circ}\text{C} - 2100 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C}) \cdot 0,08 \text{ кг} \cdot 30^{\circ}\text{C}}{330000 \text{ Дж}/\text{кг}} \approx 0,0076 \text{ кг} = 7,6 \text{ г}.$$

В результате, в первом опыте масса льда уменьшается на 7,6 г и становится равной 72,4 г, а во втором увеличивается до 87,6 г.

**Критерии:**

- 1) Корректно обосновано, что масса растаявшего льда в случае 1 и замёрзшей воды в случае 2 равны . . . . . 3 балла
- 2) Записано первое уравнение теплового баланса . . . . . 2 балла
- 3) Записано второе уравнение теплового баланса . . . . . 2 балла
- 4) Найдена начальная масса льда . . . . . 1 балл
- 5) Найдено изменение массы льда  $m$  . . . . . 1 балл
- 6) Дан правильный ответ . . . . . 1 балл

*Указание проверяющим:* В случае некорректного или отсутствующего объяснения равенства масс остальные пункты оцениваются независимо.

**Задача 9.5. Разные механизмы.**

С помощью системы, состоящей из трёх одинаковых блоков (рис. 9.3а), поднимают груз массой  $M = 120$  кг, прикладывая к свободному концу верёвки силу, равную  $F_1 = 440$  Н. Какую минимальную силу  $F_2$  нужно прикладывать для подъёма того же груза в системе, состоящей из четырёх таких же блоков (рис. 9.3б)? Верёвки считать невесомыми и нерастяжимыми. Трением пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным  $10$  м/с $^2$ .



Рис. 9.3.

**Ответ:** 360 Н.

**Решение:** Так как верёвка, перекинутая через блоки, невесома, то её сила натяжения одинакова по всей длине и равна по величине силе, с которой её тянут за свободный конец (рис. 9.4). Пусть  $m$  — масса блока, тогда

$$3F_1 = mg + Mg, \quad 4F_2 = 2mg + Mg.$$

Из первого уравнения находим массу блока:  $m = 3F_1/g - M = 132$  кг — 120 кг = 12 кг. Тогда из второго уравнения получим, что  $F_2 = (2mg + Mg)/4 = (240 \text{ Н} + 1200 \text{ Н})/4 = 360$  Н.

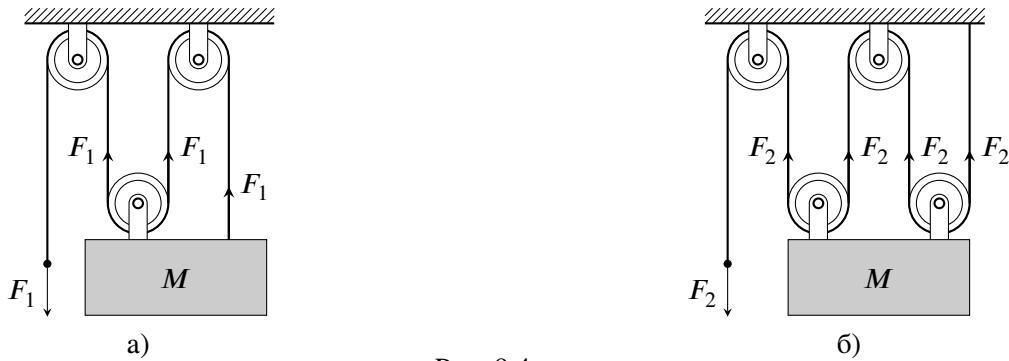


Рис. 9.4.

**Критерии:**

- 1) Найден «выигрыш в силе», который даёт механизм в первом случае . . . . . 2 балла
- 2) Найден «выигрыш в силе», который даёт механизм во втором случае . . . . . 2 балла
- 3) Записана формула  $3F_1 = mg + Mg$  или её аналог . . . . . 2 балла
- 4) Записана формула  $4F_2 = 2mg + Mg$  или её аналог . . . . . 2 балла
- 5) Найдено значение  $F_2$  . . . . . 2 балла

**Указания проверяющим:** Обоснование величины выигрыша в силе (в первом случае — в три раза, во втором — в четыре) может быть сделано просто в виде рисунка/-ов (см. рис. 9.4). В этом случае баллы за пункты 1 и/или 2 выставляются. Ученик также может использовать **альтернативный** способ обоснования — через «золотое правило механики» (метод виртуальных перемещений).

## 10 класс

**Задача 10.1. Шайбы на столе.**

На горизонтальном столе находятся две маленькие шайбы с массами  $m_1 = 1$  кг и  $m_2 = 2$  кг, связанные между собой невесомой и нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый горизонтальный блок. Блок тянут с силой  $F$  (на рис. 10.1 изображён вид сверху). Определите ускорение блока в двух случаях: 1)  $F = 10$  Н и 2)  $F = 16$  Н. Коэффициент трения между шайбами и столом равен  $\mu = 0,3$ . Отрезки нити, соединяющие шайбы и блок, горизонтальны, параллельны друг другу и направлению силы  $F$ . Ускорение свободного падения принять равным  $10 \text{ м/с}^2$ .

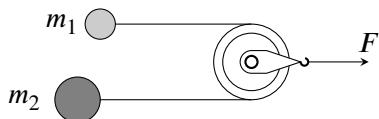


Рис. 10.1.

**Ответ:** 1)  $1 \text{ м/с}^2$ ; 2)  $3 \text{ м/с}^2$ .

**Решение:** 1. Так как блок и нить невесомы, то сила натяжения нити, тянувшая каждую шайбу, равна  $F/2$ . Максимальная сила трения между первой шайбой и столом равна  $F_{\text{тр}1} = \mu m_1 g = 3$  Н, между второй шайбой и столом —  $F_{\text{тр}2} = \mu m_2 g = 6$  Н.

Найдём связь между ускорениями шайб  $a_1$  и  $a_2$  и ускорением блока  $a_{\text{бл}}$ . Для этого перейдём в систему отсчёта блока. В ней шайбы должны двигаться с равными по величине, но противоположными по направлению ускорениями:

$$a_1 - a_{\text{бл}} = a_{\text{бл}} - a_2.$$

Отсюда получаем, что  $a_{\text{бл}} = (a_1 + a_2)/2$ .

2. В первом случае  $F/2 = 5$  Н, что больше, чем  $F_{\text{тр}1}$ , но меньше, чем  $F_{\text{тр}2}$ . Это значит, что вторая шайба не сможет сдвинуться! Найдём ускорение первой шайбы:

$$m_1 a_1 = \frac{F}{2} - F_{\text{тр}1} = 2 \text{ Н} \Rightarrow a_1 = 2 \text{ м/с}^2.$$

Следовательно, в первом случае  $a_{\text{бл}} = a_1/2 = 1 \text{ м/с}^2$ .

3. Во втором случае  $F/2 = 8$  Н, что превышает  $F_{\text{тр}1}$  и  $F_{\text{тр}2}$ . Найдём ускорения обоих грузов:

$$m_1 a_1 = \frac{F}{2} - F_{\text{тр}1} = 5 \text{ Н} \Rightarrow a_1 = 5 \text{ м/с}^2,$$

$$m_2 a_2 = \frac{F}{2} - F_{\text{тр}2} = 2 \text{ Н} \Rightarrow a_2 = 1 \text{ м/с}^2.$$

Поэтому, во втором случае  $a_{\text{бл}} = (a_1 + a_2)/2 = 3 \text{ м/с}^2$ .

**Критерии:**

- 1) Указано, что сила натяжения нити равна  $F/2$  . . . . . 1 балл
- 2) Обосновано, что в первом случае шайба  $m_2$  не движется . . . . . 2 балла
- 3) Найдено ускорение шайбы  $m_1$  в первом случае . . . . . 1 балл
- 4) Найдено ускорение блока в первом случае . . . . . 1 балл
- 5) Найдены ускорения шайб во втором случае . . . . . по 1 баллу за каждое (в сумме 2 балла)
- 6) Обосновано, что  $a_{\text{бл}} = (a_1 + a_2)/2$  . . . . . 2 балла
- 7) Найдено ускорение блока во втором случае . . . . . 1 балл

**Указания проверяющим:** 1) В пункте 1 достаточно любого указания на то, что сила натяжения равна  $F/2$ .

2) Если нет обоснования формулы  $a_{\text{бл}} = (a_1 + a_2)/2$ , за пункт 6 баллы не ставить, а остальные пункты оценивать независимо.

3) Обоснование может быть произведено отличным от авторского способом, например, с помощью сравнения перемещений шайб и блока.

**Задача 10.2. Дерево снизу.**

Длинную тонкостенную трубку радиусом  $r = 0,5$  см, закрытую снизу однородной круглой пластиной из дерева, аккуратно погружают в воду на глубину  $h = 4$  см (рис. 10.2). Толщина пластины равна  $d = 1$  см, её радиус  $R = 3$  см. В трубку сверху аккуратно наливают керосин. При какой минимальной высоте керосина  $H$  пластина оторвётся от трубки? Плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, плотность дерева  $\rho_{\text{д}} = 600$  кг/м<sup>3</sup>, плотность керосина  $\rho_{\text{к}} = 800$  кг/м<sup>3</sup>. Вода между трубкой и пластиной не проникает, жидкости в дерево не впитываются. Центр пластины лежит на оси трубки.

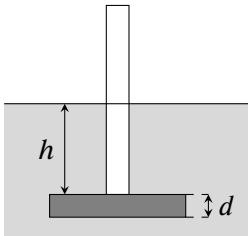


Рис. 10.2.

**Ответ:** 23 см.

**Решение:** На деревянную пластину действуют направленные вниз сила давления воды сверху, сила давления керосина и сила тяжести и направленная вверх сила давления воды снизу. Запишем условие равновесия пластины:

$$\rho_{\text{к}}gH \cdot \pi r^2 + \rho_{\text{в}}gh \cdot (\pi R^2 - \pi r^2) + mg = \rho_{\text{в}}g(h + d) \cdot \pi R^2.$$

Масса пластины равна  $m = \rho_{\text{д}}d \cdot \pi R^2$ . Подставляя её в условие равновесия и сокращая общие множители, получаем

$$\rho_{\text{к}}Hr^2 + \rho_{\text{в}}h \cdot (R^2 - r^2) + \rho_{\text{д}}dR^2 = \rho_{\text{в}}(h + d)R^2 \Rightarrow \rho_{\text{к}}Hr^2 = (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{д}})dR^2 + \rho_{\text{в}}hr^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \frac{(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{д}})dR^2 + \rho_{\text{в}}hr^2}{\rho_{\text{к}}r^2} = \frac{0,4 \text{ г/см}^3 \cdot 1 \text{ см} \cdot (3 \text{ см})^2 + 1 \text{ г/см}^3 \cdot 4 \text{ см} \cdot (0,5 \text{ см})^2}{0,8 \text{ г/см}^3 \cdot (0,5 \text{ см})^2} = 23 \text{ см.}$$

**Критерии:**

- 1) Записана формула для массы пластины  $m = \rho_{\text{д}}d \cdot \pi R^2$  . . . . . 1 балл
- 2) Записана формула для силы давления воды сверху  $\rho_{\text{в}}gh \cdot (\pi R^2 - \pi r^2)$  . . . . . 2 балла
- 3) Записана формула для силы давления воды снизу  $\rho_{\text{в}}g(h + d) \cdot \pi R^2$  . . . . . 2 балла
- 4) Записана формула для силы давления керосина  $\rho_{\text{к}}gH \cdot \pi r^2$  . . . . . 2 балла
- 5) Записано условие равновесия пластины . . . . . 1 балл
- 6) Найдена высота слоя керосина  $H$  . . . . . 2 балла

**Указания проверяющим:** Формулы из пунктов 1-4 могут быть сразу записаны в условие равновесия пластины. Если формулы приведены верно, соответствующие пункты оценивать полным баллом.

**Задача 10.3. Новогодние эксперименты.**

Экспериментатор Иппокентий Иванов решил подготовиться к Новому году и сделать праздничную гирлянду. Он взял источник постоянного напряжения, резистор сопротивлением  $R$  и большой набор одинаковых ламп, чьи сопротивления  $r$  не зависят от протекающего через них тока. Испытания показали, что при использовании в гирлянде только одной лампы, на ней выделяется мощность, равная 60 Вт. Если же использовать две лампы, то на них (в сумме) будет выделяться 97,2 Вт.

1. Чему равно отношение  $R/r$ ?

2. Сколько ламп должно быть в гирлянде, чтобы их суммарная мощность снова была равна 60 Вт?

В гирлянде источник, резистор и лампы соединяются между собой последовательно. Источник считать идеальным.

**Ответ:** 1)  $R/r = 8$ ; 2) 64.

**Решение:** Пусть  $U$  — напряжение на источнике. Если в гирлянде использовано  $N$  ламп, ток текущий в цепи равен  $I = U/(R + Nr)$ . Суммарная мощность, выделяющаяся на лампах, составляет

$$P_N = I^2 \cdot Nr = \frac{U^2 Nr}{(R + Nr)^2}.$$

По условию  $P_1 = 60$  Вт,  $P_2 = 97,2$  Вт, следовательно

$$\begin{cases} U^2 r/(R + r)^2 = 60 \text{ Вт}, \\ 2U^2 r/(R + 2r)^2 = 97,2 \text{ Вт} \end{cases} \Rightarrow \frac{2(R + r)^2}{(R + 2r)^2} = \frac{97,2}{60} \Rightarrow \frac{R + r}{R + 2r} = 0,9 \Rightarrow R = 8r.$$

Если  $P_N = P_1$ , то

$$\begin{aligned} \frac{U^2 Nr}{(R + Nr)^2} &= \frac{U^2 r}{(R + r)^2} \Rightarrow \frac{U^2 Nr}{(8r + Nr)^2} = \frac{U^2 r}{(9r)^2} \Rightarrow \frac{N}{(8 + N)^2} = \frac{1}{81} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 81N = (N + 8)^2 \Rightarrow N^2 - 65N + 64 = 0. \end{aligned}$$

Решение этого уравнения, отличное от  $N = 1$ , есть  $N = 64$ .

**Критерии:**

- 1) Записано выражение для мощности одной лампы  $U^2 r/(R + r)^2$  . . . . . 1 балл
- 2) Записано выражение для мощности двух ламп  $2U^2 r/(R + 2r)^2$  . . . . . 1 балл
- 3) Найдено отношение  $R/r$  . . . . . 3 балла
- 4) Записано уравнение  $NU^2 r/(R + Nr)^2 = U^2 r/(R + r)^2$  . . . . . 2 балла
- 5) Записано уравнение  $N^2 - 65N + 64 = 0$  или аналог . . . . . 2 балла
- 6) Найдено значение  $N = 64$  . . . . . 1 балл

**Задача 10.4. В отрыв.**

Тонкий однородный деревянный стержень, нижний конец которого упирается в дно сосуда, удерживается в положении, изображённом на рис. 10.3, с помощью вертикальной нити, привязанной к его верхнему концу. В сосуд медленно наливают воду. При какой толщине слоя воды  $h$  нижний конец стержня оторвётся от дна? Точка крепления нити к стержню находится на высоте  $H$  относительно дна сосуда. Плотность дерева, из которого сделан стержень, равна  $640 \text{ кг}/\text{м}^3$ , плотность воды —  $1000 \text{ кг}/\text{м}^3$ .

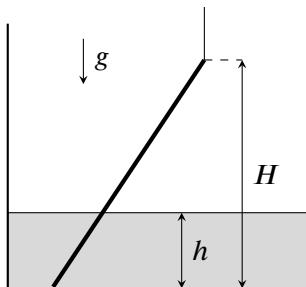


Рис. 10.3.

**Ответ:**  $h = 2H/5$ .

**Решение:** На стержень действуют (в общем случае) 4 силы: сила тяжести  $mg$ , где  $m$  — масса стержня, приложенная к его середине; сила Архимеда, приложенная с середине погруженной части; сила натяжения нити  $T$  и сила реакции со стороны дна  $N$ . Когда нижний конец стержня отрывается от дна,  $N = 0$ . Запишем правило моментов относительно точки подвеса стержня (точки  $O$ ):

$$mg \cdot \frac{H}{2} \tan \alpha = F_A \left( H - \frac{h}{2} \right) \tan \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между стержнем и вертикалью. Запишем выражения для массы стержня и силы Архимеда ( $S$  — площадь поперечного сечения):

$$m = \frac{\rho_{\text{д}} SH}{\cos \alpha}, \quad F_A = \frac{\rho_{\text{в}} g Sh}{\cos \alpha}$$

и подставим их в правило моментов

$$\frac{\rho_{\text{д}} g SH^2}{2 \cos \alpha} \cdot \tan \alpha = \frac{\rho_{\text{в}} g Sh}{\cos \alpha} \cdot \left( H - \frac{h}{2} \right) \tan \alpha \Rightarrow \rho_{\text{д}} H^2 = \rho_{\text{в}} h (2H - h) \Rightarrow 0,64 H^2 = h (2H - h).$$

Решая полученное уравнение, находим  $h$

$$h^2 - 2hH + 0,64H^2 = 0 \Rightarrow h = 0,4H \text{ или } h = 1,6H.$$

Выбираем корень, который меньше  $H$ , и получаем  $h = 0,4H$ .

**Критерии:**

- 1) Корректно изображены силы, действующие на стержень . . . . . 1 балл
- 2) Записано выражение для массы стержня . . . . . 1 балл
- 3) Записано выражение силы Архимеда . . . . . 1 балл
- 4) Записано правило моментов относительно точки  $O$  . . . . . 3 балла
- 5) Записано уравнение  $h^2 - 2hH + 0,64H^2 = 0$  или аналог . . . . . 2 балла
- 6) Найдена высота  $h$  . . . . . 2 балла

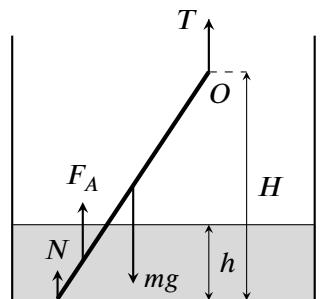


Рис. 10.4.

**Указание проверяющим:** Если учащийся пишет правило моментов относительно какой-либо другой точки (не  $O$ ), то для пункта 4 верно записанное правило моментов оценивается в 2 балла, а верно записанное условие равенства равнодействующей сил нулю (или второе правило моментов) — 1 баллом.

**Задача 10.5. Тень от камня.**

От основания вертикального фонаря высотой  $H = 9,8$  м бросили камень со скоростью  $v_0 = 12$  м/с под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту (рис. 10.5). На какое максимальное расстояние от фонаря сместится тень камня во время его полёта, если других источников света в округе нет. Фонарь считать точечным источником, поверхность земли горизонтальной, а сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным  $10$  м/с<sup>2</sup>.

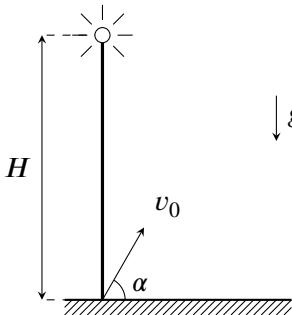


Рис. 10.5.

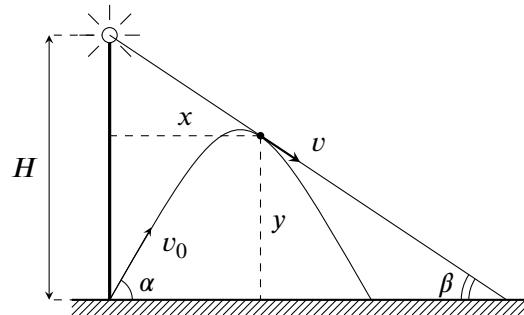


Рис. 10.6.

**Ответ:** 16,3 м.

**Решение:** Пусть  $L$  — искомое максимальное смещение тени. Тень от фонаря смещается на максимальное расстояние, когда соответствующий луч, идущий от фонаря, будет идти по касательной к траектории камня (см. рис. 10.6). Пусть  $t$  — время от момента броска, за которое камень оказался в точке касания. Тогда

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2},$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt.$$

Вектор скорости камня всегда направлен по касательной к траектории, следовательно он направлен вдоль луча, изображённого на рис. 10.6. Посчитаем тангенс угла наклона  $\beta$  этого луча к горизонту двумя способами:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{H - y}{x} = \frac{|v_y|}{v_x} \Rightarrow \frac{H - v_0 t \sin \alpha + gt^2/2}{v_0 t \cos \alpha} = \frac{gt - v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} \Rightarrow H = \frac{gt^2}{2}.$$

Отсюда получаем, что  $t = \sqrt{2H/g} = 1,4$  с. Тангенс  $\beta$ , соответственно, равен

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{gt - v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} \approx \frac{14 - 10,4}{6} \approx 0,6.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{H}{L} \Rightarrow L = \frac{H}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{9,8 \text{ м}}{0,6} \approx 16,3 \text{ м.}$$

**Критерии:**

- 1) Записаны законы движения камня  $x(t)$  и  $y(t)$  . . . . . 0,5 балла
- 2) Записаны законы скорости камня  $v_x(t)$  и  $v_y(t)$  . . . . . 0,5 балла
- 3) Указано, что максимальное смещение тени происходит при касании луча и траектории . . . . . 2 балла
- 4) Записано уравнение  $(H - y)/x = |v_y|/v_x$  или его аналог . . . . . 3 балла
- 5) Найдено время в точке касания . . . . . 2 балла
- 6) Найдено максимальное смещение камня  $L$  . . . . . 2 балла

*Указание проверяющим:* 1) В пункте 4 должно быть приведено верное соотношение, связывающее скорость камня и координаты в точке касания луча и траектории.

2) В пункте 5 достаточно привести формулу для  $t$ , нахождение числового значения не является обязательным.

## 11 класс

**Задача 11.1. Половина на половину.**

С вертикальной стены высотой  $H$  бросили в горизонтальном направлении камень (рис. 11.1). Наблюдатель, стоящий у подножия стены точно под точкой бросания, заметил, что камень приближался к нему в течение ровно половины времени своего полёта. Определите начальную скорость камня  $v$ , его дальность полёта  $L$  и угол  $\alpha$ , под которым камень упадёт на землю. Поверхность земли горизонтальна. Размерами наблюдателя и сопротивлением воздуха пренебречь.

**Ответ:**  $v = \sqrt{3gH/4}$ ,  $L = H\sqrt{3/2}$ ,  $\alpha = \arctg \sqrt{8/3} \approx 58,5^\circ$ .

**Решение: Способ №1.** Поместим начало координат в месте нахождения наблюдателя и запишем зависимость координат камня от времени

$$x(t) = vt, \quad y(t) = H - gt^2/2.$$

Расстояние  $r$  от камня до наблюдателя находим с помощью теоремы Пифагора:

$$r^2 = x^2 + y^2 = v^2 t^2 + (H - gt^2/2)^2 \Rightarrow r^2 = H^2 + (v^2 - gH)t^2 + g^2 t^4/4.$$

Найдём точку максимума расстояния  $t_m \neq 0$ :

$$(r^2)' = 0 \Rightarrow 2t_m(v^2 - gH) + g^2 t_m^3 = 0 \Rightarrow t_m^2 = 2(gH - v^2)/g^2.$$

С другой стороны, по условию  $t_m = 1/2 \cdot t_{\text{полёта}} = 1/2 \cdot \sqrt{2H/g}$ . Отсюда

$$\frac{2(gH - v^2)}{g^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2H}{g} \Rightarrow 4(gH - v^2) = gH \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3gH}{4}}.$$

Дальность полёта равна

$$L = vt_{\text{полёта}} = \sqrt{3gH/4} \cdot \sqrt{2H/g} = H\sqrt{3/2}.$$

Угол с горизонтом, под которым упадёт камень — угол между вектором скорости и поверхностью земли:

$$\operatorname{tg} \alpha = gt_{\text{полёта}}/v = \sqrt{8/3} \Rightarrow \alpha \approx 58,5^\circ.$$

**Способ №2.** Поместим начало координат в месте нахождения наблюдателя. Вектор скорости камня  $u$  в точке максимального удаления перпендикулярен радиус-вектору этой точки (рис. 11.2). Время, за которое камень попадёт в эту точку, равно половине времени полёта  $t_m = \frac{1}{2}t_{\text{полёта}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}}$ . Так как вектор скорости перпендикулярен радиус-вектору, то

$$\frac{y}{x} = \frac{u_x}{|u_y|} \Rightarrow \frac{H - gt_m^2/2}{vt_m} = \frac{v}{gt_m} \Rightarrow v^2 = g \left( H - \frac{gt_m^2}{2} \right) = \frac{3gH}{4} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3gH}{4}}.$$

Найдение  $L$  и  $\alpha$  аналогично Способу №1.

**Критерии (для способа №1):**

- 1) Записан закон изменения расстояния от наблюдателя  $r(t)$  . . . . . 2 балла
- 2) Записана формула для  $t_m$  . . . . . 1 балл
- 3) Найдена точка максимума  $r(t)$  . . . . . 2 балла
- 4) Найдена начальная скорость  $v$  . . . . . 2 балла
- 5) Найдено выражение для  $L$  . . . . . 2 балла
- 6) Найдено значение  $\alpha$  . . . . . 1 балл

**Критерии (для способа №2):**

- 1) Указано, что в точке максимального удаления радиус-вектор перпендикулярен скорости . . . . . 1 балл
- 2) Записана формула для  $t_m$  . . . . . 1 балл
- 3) Записано условие  $y/x = u_x/|u_y|$  или аналог . . . . . 3 балла
- 4) Найдена начальная скорость  $v$  . . . . . 2 балла
- 5) Найдено выражение для  $L$  . . . . . 2 балла
- 6) Найдено значение  $\alpha$  . . . . . 1 балл

**Указание проверяющим:** В пункте 6 ответ в виде  $\alpha = \arctg \sqrt{8/3}$  (или аналогичный) засчитывать как верный и оценивать полным баллом.

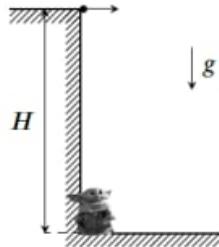


Рис. 11.1.

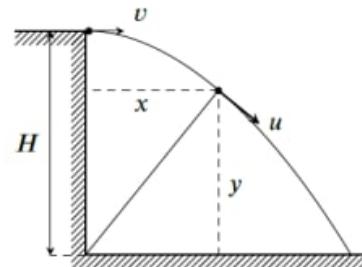


Рис. 11.2.

**Задача 11.2. Цепь с конденсатором.**

Определите установившийся заряд конденсатора в цепи, изображённой на рис. 11.3, если  $\mathcal{E}_1 = 1$  В,  $\mathcal{E}_2 = 3$  В,  $\mathcal{E}_3 = 8$  В,  $r_1 = 6$  Ом,  $r_2 = 4$  Ом,  $C = 3300$  мкФ. Внутренним сопротивлением батареек пренебречь.

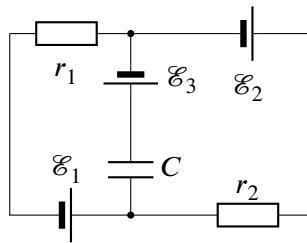


Рис. 11.3.

**Ответ:** 0,019 Кл.

**Решение:** В установившемся режиме ток в цепи конденсатора не течёт. Пусть  $I$  — ток, текущий во внешнем контуре (направление — по часовой стрелке). Тогда

$$I(r_1 + r_2) = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{r_1 + r_2} = \frac{2 \text{ В}}{10 \text{ Ом}} = 0,2 \text{ А.}$$

Запишем 2ое правило Кирхгофа для, например, левого контура (направление обхода — по часовой стрелке):

$$U_C + Ir_1 = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1$$

и найдём напряжение на конденсаторе

$$U_C = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1 - Ir_1 = 8 \text{ В} - 1 \text{ В} - 0,2 \text{ А} \cdot 6 \text{ Ом} = 5,8 \text{ В.}$$

Заряд на этом конденсаторе равен

$$q = CU_C = 3,3 \cdot 10^{-3} \Phi \cdot 5,8 \text{ В} \approx 0,019 \text{ Кл.}$$

**Критерии:**

- 1) Найден ток во внешнем контуре . . . . . 4 балла
- 2) Найдено напряжение на конденсаторе . . . . . 4 балла
- 3) Вычислен заряд на конденсаторе . . . . . 2 балла

**Указания проверяющим:** 1) Напряжение на конденсаторе (и, как следствие, заряд) могут быть приведены с противоположным знаком. На выставляемый балл это не влияет.

2) Приводить числовые значения в пунктах 1 и 2 не обязательно, достаточно верных формул.

**Задача 11.3. Стержень на опоре.**

Тонкий однородный стержень длиной  $L = 60$  см лежит на вертикальной опоре высотой  $h = 30$  см, своим левым концом упираясь в горизонтальную поверхность стола (рис. 11.4). При каком наименьшем коэффициенте трения  $\mu$  между стержнем и столом стержень будет находиться в равновесии, если точка его касания с поверхностью стола расположена на расстоянии  $s = 40$  см от опоры? Трения между опорой и стержнем нет, толщиной опоры пренебречь.

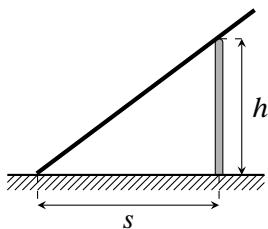


Рис. 11.4.

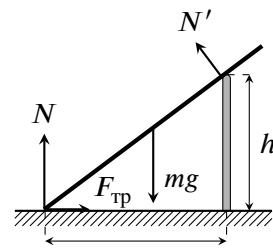


Рис. 11.5.

**Ответ:**  $\mu = 36/77 \approx 0,47$ .

**Решение:** Пусть  $m$  — масса стержня, а  $\alpha$  — угол между стержнем и поверхностью стола. Из данных в условии задачи находим, что  $\sin \alpha = 3/5$  и  $\cos \alpha = 4/5$ . Изобразим силы, действующие на стержень (рис. 11.5) и запишем условия равнодействующей всех сил нулю:

$$\begin{cases} F_{\text{тр}} = N' \sin \alpha, \\ N + N' \cos \alpha = mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{\text{тр}} = 3N'/5, \\ N + 4N'/5 = mg \end{cases}$$

и правило моментов относительно точки упора стержня в стол

$$N' \sqrt{s^2 + h^2} = mg \cdot \frac{L \cos \alpha}{2} \Rightarrow N' \cdot 50 \text{ см} = mg \cdot 24 \text{ см} \Rightarrow N' = \frac{12mg}{25}.$$

Выразим силу трения и силу реакции  $N$  через  $mg$ :

$$\begin{aligned} N + \frac{4}{5} \cdot \frac{12mg}{25} &= mg \Rightarrow N = \frac{77mg}{125}, \\ F_{\text{тр}} &= \frac{3}{5} \cdot \frac{12mg}{25} = \frac{36mg}{125}. \end{aligned}$$

Если коэффициент трения минимален, то  $F_{\text{тр}} = \mu N$ . Отсюда находим, что

$$\mu = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{36}{77} \approx 0,47.$$

**Критерии:**

- 1) Корректно изображены силы, действующие на стержень . . . . . 1 балл
- 2) Записана формула  $F_{\text{тр}} = \mu N$  . . . . . 1 балл
- 3) Записано условие равенства сил в проекции на 2 оси . . . . . 4 балла (по 2 балла за проекцию)
- 4) Записано правило моментов . . . . . 2 балла
- 5) Найдено значение  $\mu$  . . . . . 2 балла

**Указания проверяющим:** 1) Сила трения может быть сразу записана как  $F_{\text{тр}} = \mu N$  в уравнениях из пунктов 3 и 4. В этом случае балл за пункт 2 выставляется.

2) Ответ зачитывать как в виде десятичной дроби, так и в виде обыкновенной.

3) Учащийся может в пункте 3 вместо одного или обоих равенств записать правило моментов относительно одной (или двух) точек, отличных от взятой в пункте 4. В этом случае каждое корректное и **независимое** уравнение оценивается 2 баллами (но не более 4 баллов за пункт).

**Задача 11.4. Блок с пружинами.**

В системе, изображённой на рис. 11.6, обе пружины горизонтальны, своим левым концом прикреплены к стене, а их правые концы соединены нитью, перекинутой через невесомый блок. Жёсткость одной пружины равна  $k$ , другой —  $2k$ , и в начальный момент они не деформированы. Какую работу  $A$  нужно совершить, чтобы медленно переместить блок вправо на расстояние  $x$ ? Пружины считать невесомыми, а нить — невесомой и нерастяжимой. Трение между нитью и блоком отсутствует.

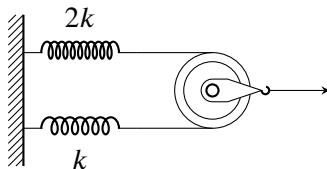


Рис. 11.6.

**Ответ:**  $A = 4kx^2/3$ .

**Решение:** Пусть при перемещении оси блока на  $x$  длина верхней пружины увеличивается на  $x_1$ , а нижней — на  $x_2$ . Так как пружины связаны между собой невесомой нитью, силы их натяжения равны:

$$2kx_1 = kx_2 \Rightarrow x_2 = 2x_1.$$

Из-за движения блока суммарная длина пружин увеличивается на  $2x$ :

$$x_1 + x_2 = 2x \Rightarrow 3x_1 = 2x \Rightarrow x_1 = \frac{2x}{3}, x_2 = \frac{4x}{3}.$$

Работа по перемещению блока на  $x$  равна изменению потенциальной энергии пружин:

$$A = \frac{2kx_1^2}{2} + \frac{kx_2^2}{2} = \frac{4kx^2}{9} + \frac{8kx^2}{9} = \frac{4kx^2}{3}.$$

**Критерии:**

- 1) Получена связь между удлинениями пружин . . . . . 2 балла
- 2) Записано соотношение  $x_1 + x_2 = 2x$  или его аналог . . . . . 3 балла
- 3) Найдены удлинения обеих пружин  $x_1 = 2x/3$ ,  $x_2 = 4x/3$  . . . . . 2 балла
- 4) Записана формула для работы через  $x_1$  и  $x_2$  . . . . . 1 балл
- 5) Найдено выражение для работы  $A = 4kx^2/3$  . . . . . 2 балла

**Задача 11.5. Утечка в сосуде.**

Герметичный сосуд состоит из двух горизонтальных цилиндрических частей разного сечения, перекрытых двумя поршнями, соединёнными между собой жёстким стержнем. Начальное положение поршней и размеры показаны на рис. 11.7. Между торцами сосуда и ближайшими поршнями находится азот, причём давление газа слева в 1,2 раза выше, чем справа. Снаружи сосуда и между поршнями — вакуум. В некоторый момент в левом торце сосуда появилась микротрещина, и газ стал медленно выходить наружу. Когда из левой части сосуда вышло  $4/9$  находившегося там азота, поршни начали смещаться. Насколько они смещаются, если оттуда выйдет ещё такое же количество газа? Длина стержня больше  $L$ . Считать, что температура азота в обеих частях сосуда одинакова и остаётся постоянной в течение всего процесса. Трение между поршнями и стенками сосуда отсутствует.

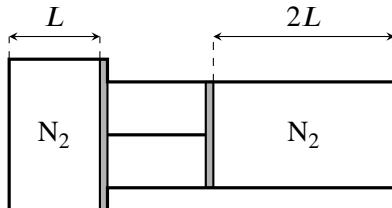


Рис. 11.7.

**Ответ:**  $8L/11$ .

**Решение:** Пусть  $p_0$  — давление азота в правой части сосуда. Тогда  $6p_0/5$  — давление в левой части. Когда оттуда выйдет  $4/9$  от первоначального количества газа  $v$ , давление азота в левой части упадёт до

$$p_1 = \frac{5}{9} \cdot \frac{6p_0}{5} = \frac{2p_0}{3}.$$

Поршни начнут смещаться тогда, когда **сила** давления газа на левый поршень сравняется с силой давления газа на правый. Если  $S_1$  и  $S_2$  — площади левого и правого поршней, то

$$p_1 S_1 = p_0 S_2 \Rightarrow \frac{2p_0 S_1}{3} = p_0 S_2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{2}.$$

Когда из левой части выйдет ещё  $4v/9$  газа, поршень сдвинется влево на расстояние  $x$ . Обозначим  $p'_1$  и  $p'_2$  новые давления в левой и правой частях сосуда. Запишем закон Менделеева-Клапейрона для обеих частей:

$$\begin{cases} p'_1 S_1 (L - x) = \frac{1}{9} v R T, \\ \frac{6}{5} p_0 S_1 L = v R T \end{cases} \Rightarrow p'_1 (L - x) = \frac{2}{15} p_0 L \quad (\text{левая часть}),$$

$$p'_2 (2L + x) = p_0 \cdot 2L \quad (\text{правая часть}).$$

Так как  $p'_1 S_1 = p'_2 S_2$ , то  $p'_1 = 3p'_2/2$ . Отсюда

$$\begin{cases} p'_1 (L - x) = \frac{2}{15} p_0 L, \\ \frac{3}{2} p'_1 (2L + x) = p_0 \cdot 2L \end{cases} \Rightarrow p'_1 (L - x) = \frac{1}{15} \cdot \frac{3}{2} p'_1 (2L + x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10(L - x) = 2L + x \Rightarrow x = \frac{8L}{11}.$$

**Критерии:**

- 1) Найдено давление в левом сосуде после первой утечки . . . . . 1 балл
- 2) Найдено отношение площадей поршней . . . . . 2 балла
- 3) Записан закон Бойля-Мариотта для правого сосуда (после второй утечки) . . . . . 2 балла
- 4) Получено уравнение  $p'_1 (L - x) = 2/15 \cdot p_0 L$  или его аналог . . . . . 3 балла
- 5) Найдено смещение поршня  $x$  . . . . . 2 балла