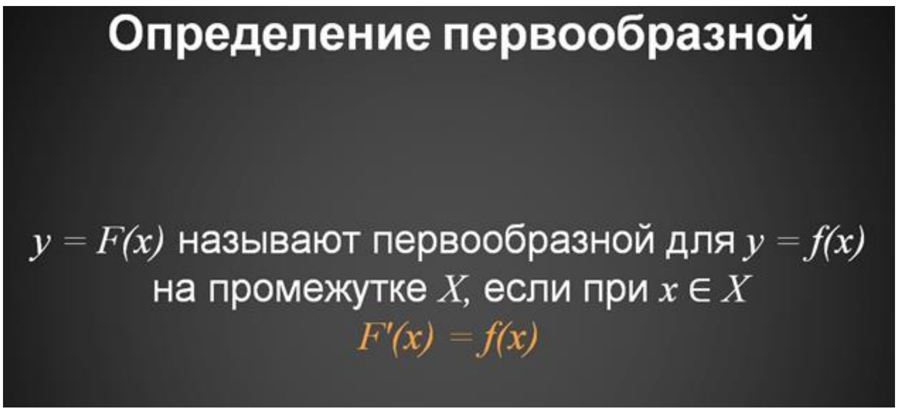
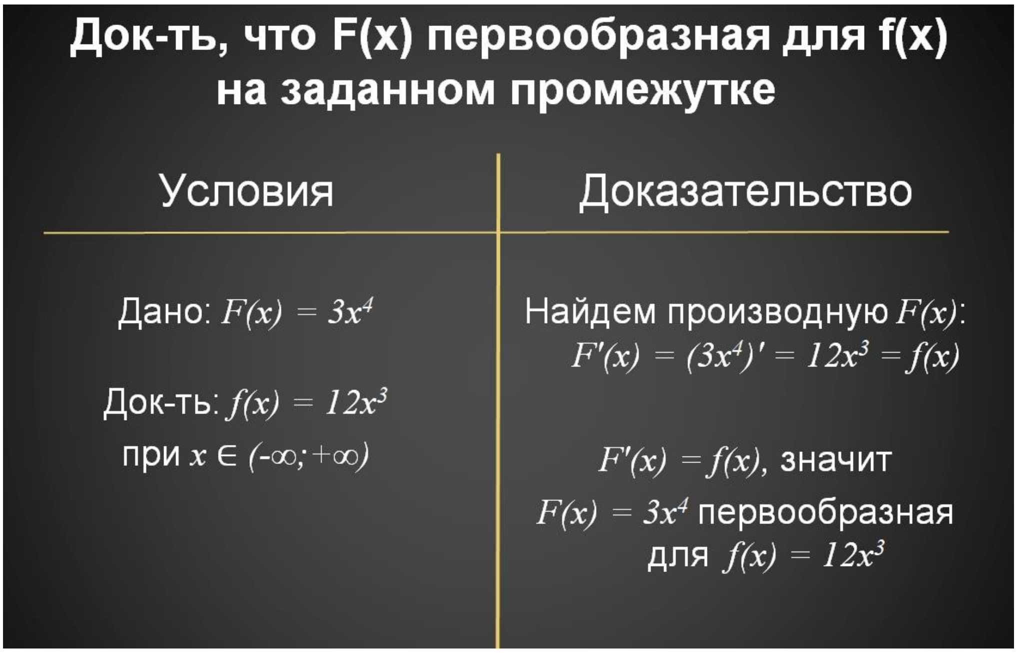
**Урок 70-71**

1. **Определение первообразной/**



Функция f(x) обозначается маленькой буквой, латинской. Первообразная обозначается большой латинской буквой F(x).




*Пример 1*. Функция $F(x)=\frac{x^3}{3}$ есть первообразная для функции $f(x)=x^2$ на интервале $(-\infty;+\infty)$, так как

$$F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=\frac{1}{3}\cdot(x^3)'=\frac{1}{3}\cdot x^2=x^2=f(x)$$

для всех $x$ $(-\infty;+\infty)$.

Легко заметить, что $\frac{x^3}{3}+7$ имеет ту же самую производную $x^2$ и поэтому также является первообразной для $x^2$ на $R$. Ясно, что вместо числа $7$ можно поставить любую постоянную. Таким образом, мы видим, что задача нахождения первообразной имеет бесконечно много решений. В следующем плановом вопросе мы увидим, как найти все эти решения.

*Пример 2*. Для функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ на интервале $(0;+\infty)$ первообразной является функция

$F(x)=2\sqrt{x}$,

так как

$$F'(x)=(2\sqrt{x})'=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}=f(x)$$

для всех $x$ из этого интервала. Так же как и в примере 1, функция $F(x)=2\sqrt{x}+C$ при любой постоянной $C$ есть первообразная для функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ на том же интервале $(0;+\infty)$.

*Пример 3*. Функция $F(x)=\frac{1}{x}$ не является первообразной для функции $f(x)=\frac{-1}{x^2}$ на промежутке $(-\infty;+\infty)$, так как равенство $F'(x)=f(x)$ не выполнено в точке $0$. Однако в каждом из промежутков $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$ функция $F$ является первообразной для $f$.

## Таблица первообразных

| Функция f(x) | Первообразная F(x) |
|---|---|
| kf(x) | kF(x) |
| f(x)+g(x) | F(x)+G(x) |
| k (постоянная) | kx |
| $x^n$ (n∈Z, n≠-1) | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ |
| sin x | - cos x |
| cos x | sin x |
| $\frac{1}{\cos^2 x}$ | tg x |
| $\frac{1}{\sin^2 x}$ | -ctg x |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x}$ |

## Основное свойство первообразной

*Общий вид первообразных*.

Задача интегрирования состоит в том, чтобы для заданной функции найти все ее первообразные. При решении этой задачи важную роль играет следующее утверждение:

*Признак постоянства функции. Если на некотором промежутке , то функция* $F$ *– постоянная на этом промежутке*.

Справедлива следующая теорема (*основное свойство первообразных*):

*Теорема*. **Любая первообразная для функции f на промежутке I может быть записана в виде**

F(x) + C, (1) где F (x) - одна из первообразных для функции f (x) на промежутке I, а C - произвольная постоянная.

**Пример:**

Найти общий вид первообразной для функции $f(x) = -x^3$

Решение:

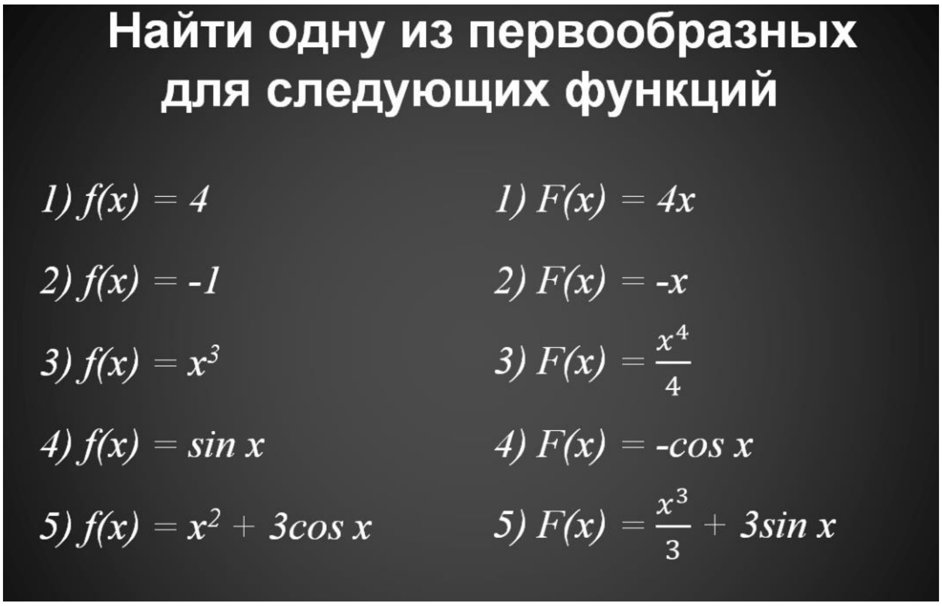
Заметим, что одной из первообразных функции f является функция

$\frac{-x^4}{4}$. Т.к. $\left(\frac{-x^4}{4}\right)' = -x^3$

В силу доказанной теоремы общий вид первообразных для функции f таков:

$$F(x) = \frac{-x^4}{4} + C$$

***Задание: Записываем функции. Стрелочками для каждой функции находим первообразную.***



№337 Для функции f найдите первообразную F, принимающую заданное значение в указанной точке

№337(а)

а) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $F(\frac{1}{2})=-12$

Решение:

1) Находим общий вид первообразной:

$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$ – первообразная для степенной ф-ции

| $f(x)$ | $F(x)$ |
|---|---|
| $x^n$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ |

$F(x)=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}=\frac{x^{-1}}{-1}=-\frac{1}{x}+C$

2) Подставим вместо x число $\frac{1}{2}$:

$-\frac{1}{\frac{1}{2}}+C=-12$

$-2+C=-12$

$C=-12+2$

$C=-10$



3. Записываем ответ.

Ответ: $F(x)=-\frac{1}{x}+(-10)=-\frac{1}{x}-10$



**Практическая работа № 34**

**Решение задач на определение и основное свойство первообразной.**

Цель : закрепление навыков умения определять первообразную функции ; развитие логического мышления, памяти, внимания и самостоятельности

**Форма работы:** решение примеров
**Время выполнения:** 2ч
**Контроль выполнения:** проверка тетради
**Порядок выполнения работы:**
1. Повторить теоретический материал и изучить образцы решения примеров
2. Выполнить задания практической работы.

# Методические указания

## Теоретический материал

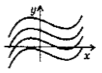
**Первообразная функции.**

Функция F (x) называется **первообразной** для функции f(x) на данном промежутке, если для любого x из этого промежутка $F'(x)=f(x)$

**Основное свойство первообразных.**

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то и функция $F(x)+C$, где $C$ — произвольная постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ




Графики всех первообразных данной функции $f(x)$ получаются из графика какой-либо одной первообразной параллельными переносами вдоль оси $y$.

**Таблица первообразных**

| Функция f(x) | Первообразная F(x) |
|---|---|
| kf(x) | kF(x) |
| f(x)+g(x) | F(x)+G(x) |
| k (постоянная) | kx |
| $x^n$ (n∈Z, n≠-1) | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ |
| sin x | - cos x |
| cos x | sin x |
| $\frac{1}{cos^2 x}$ | tg x |
| $\frac{1}{sin^2 x}$ | -ctg x |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x}$ |

**Пример 1.** Выясните, является ли $F(x)=\frac{2}{9}x^3-3x+cos\,x-1$ первообразной для функции $f(x)=\frac{2}{3}x^2-3-sin\,x$ на $\boldsymbol{R}$?

Решение . Находим

$$F'(x)=\left(\frac{2}{9}x^3-3x+cos\,x\right)'=\frac{2}{9}\cdot 3x^2-3\cdot 1+(-sin\,x)=\frac{2}{3}x^2-3-sin\,x=f(x).$$

Следовательно, по определению $F(x)=\frac{2}{9}x^3-3x+cos\,x-1$ является первообразной для функции $f(x)=\frac{2}{3}x^2-3-sin\,x$ на $\boldsymbol{R}$.

**Пример 2.** Для функции $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{cos^2 x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4};1+2\sqrt{\pi}\right)$.

Решение . По основному свойству первообразных любая первообразная функции $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{cos^2 x}$ записывается в виде $F(x)=2\cdot 2\sqrt{x}-tgx+C=4\sqrt{x}-tgx+C$. Координаты точки $M\left(\frac{\pi}{4};1+2\sqrt{\pi}\right)$ графика искомой первообразной должны удовлетворять уравнению:

$$1+2\sqrt{\pi}=4\sqrt{\frac{\pi}{4}}-tg\frac{\pi}{4}+C.$$

Отсюда находим, что

$$1+2\sqrt{\pi}=2\sqrt{\pi}-1+C,$$

$$C = 2.$$

Следовательно, уравнение искомой первообразной имеет вид: $F(x) = 4\sqrt{x} - tgx + 2$

**Контрольные вопросы:**

1.Что называется первообразной функции?

2. Сформулируйте основное свойство первообразной.

**Задания практической работы :**

**Вариант 1.**

1. а)Является ли функция $F(x) = x^2 + 3x + 1$ первообразной для функции $f(x) = 2x + 3$ на $\boldsymbol{R}$?

б) Является ли функция $F(x) = \frac{1}{x^2} - \sin x$ первообразной для функции $f(x) = -\frac{1}{x^3} - \cos x$ на $\boldsymbol{R}$?

2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{3}{x^2}$.

б) Для функции $f(x) = sinx$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4};-2\right)$.

**Вариант 2.**

1. а)Является ли функция $F(x) = x^2 - x$ первообразной для функции $f(x) = 2x - 1$ на $\boldsymbol{R}$?

б) Является ли функция $F(x) = -\frac{x^4}{4} + 5x + 2$ первообразной для функции $f(x) = -x^3 + 5$ на $\boldsymbol{R}$?

2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x) = \frac{3}{x^4} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

б) Для функции $f(x) = 1 - x^2$ найдите первообразную, график которой проходит через точку М(-3;9) .

РЕШЕНИЕ 1 ВАРИАНТА

Вариант №1

1. а) $F(x) = x^2+3x+1$ $f(x)=2x+3$ на $R$

Решение:

Используем правило: $F'(x)=f(x)$

$(x^2+3x+1)' = 2x+3 = f(x)$

ч.т.д

б) $F(x) = \frac{1}{x^2} - \sin x$ $f(x) = -\frac{1}{x^3} - \cos x$ на $R$

Решение:

$F'(x) = \left(\frac{1}{x^2} - \sin x\right)' = \left(x^{-2} - \sin x\right)' =$

$= -2x^{-2-1} - \cos x = -2x^{-3} - \cos x = -\frac{2}{x^3} - \cos x$

$\neq -\frac{1}{x^3} - \cos x$

№2 а) Найти общий вид первообраз.

$f(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{3}{x^2}$

Решение:

Упростим ф-цию $f(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{3}{x^2} =$

$= x^2 - 3x^{-2}$

$F(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} - 3\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^{-1}}{-1} =$

$\frac{x^3}{3} + \frac{3}{x} + C$

б) $f(x) = \sin 2x$ $\quad M(\overset{x}{\frac{\pi}{4}} ; \overset{y}{2})$

Решение:

1) $F(x) = -\cos x + C$

2) $-\cos \frac{\pi}{4} + C = 2$

$-\frac{\sqrt{2}}{2} + C = 2$

$C = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

$C = 2\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: $F(x) = -\cos x + 2\frac{\sqrt{2}}{2}$