<u>Определенный интеграл, его свойства, геометрический смысл</u>

Криволинейная трапеция и ее площадь

Пусть на отрезке $[a;b]$ дана непрерывная неотрицательная функция $y = f(x)$ (рис.1). Проведем вертикальные прямые до пересечения с графиком функции $f(x)$.

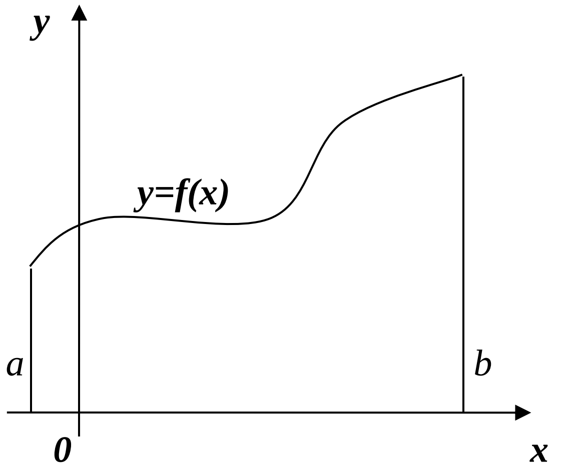


рис.1

<u>Определение.</u> *Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной неотрицательной функции* $f(x)$, $x \in [a;b]$, *прямыми* $x = a, x = b$ *и отрезком оси* Ox.

Как вычислить площадь криволинейной трапеции? Рассмотрим криволинейную трапецию *CHKD (рис.2)*, у которой абсцисса точки *C* равна *x*, а абсцисса точки *D* равна $x + \Delta x$. Пусть график функции $f(x)$ пересекает ось ординат в точке *A*. Тогда площадь криволинейной трапеции *CHKD* равна разности площади криволинейной трапеции *OAKD* и *OAHC* . Так как площадь криволинейной трапеции *OAHC* зависит от *x*, то ее можно обозначить символом *S(x).* Аналогично, площадь криволинейной трапеции *OAKD* есть функция от $x + \Delta x$ и ее можно обозначить символом *S(* $x + \Delta x$ *).* Поэтому площадь криволинейной трапеции *CHKD* равна разности *S(* $x + \Delta x$ *)* и *S(x)* и может быть обозначена символом $\Delta S(x)$.

Построим два прямоугольника *CHED* и *CMKD*. Площадь первого из них равна $f(x)\Delta x$, а площадь второго равна $f(x + \Delta x)\Delta x$. Поскольку площадь криволинейной трапеции *CHKD* не меньше площади прямоугольника *CHED* и не больше площади прямоугольника *CMKD*, можно записать неравенство.

$$f(x)\Delta x \le \Delta S(x) \le f(x + \Delta x)\Delta x$$

Разделив обе части этого неравенства на Δx и найдем пределы всех выражений при $\Delta x \to 0$. Но $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta S(x)}{\Delta x}$ есть производная функции *S(x)*, а в силу непрерывности функции $f(x)$ имеем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x)$. Следовательно, $S' = f(x)$.

Итак, производная площади криволинейной трапеции равна функции, задающей верхнюю границу трапеции.

Поэтому площадь криволинейной трапеции есть одна из первообразных функции, задающей верхнюю границу трапеции, и может быть вычислена с помощью интегрирования: $S = \int f(x)dx$

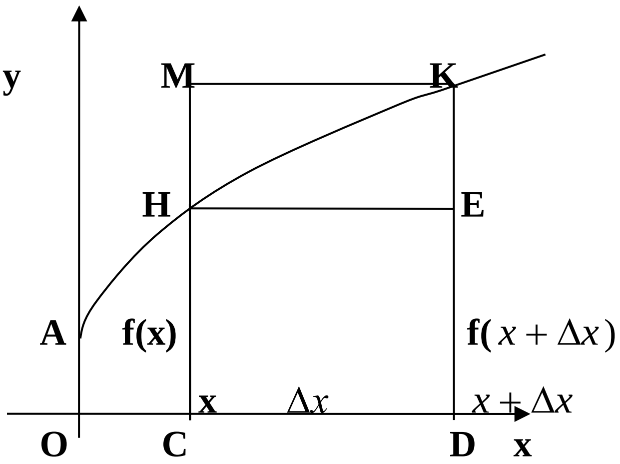


рис.2

Пусть $x \in [a;b]$. Площадь криволинейной трапеции, заштрихованной на рис.3, есть функция от *x*. Обозначим ее через *S(x)*. Очевидно, что *S(a)=0*, так как при *x=a* заштрихованная фигура превращается в отрезок, а *S(b)=S* есть площадь рассматриваемой криволинейной трапеции.

Замечание. *Когда говорят о непрерывности функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$, то под этим понимают непрерывность ее в каждой точке этого промежутка, в том числе в точках a и b, т.е., что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ при стремлении x к a и $\lim\limits_{x \to b} f(x) = f(b)$ при стремлении x к b.*

Используя равенство $S'(x) = f(x)$, где $f(x) \geq 0$ на промежутке $[a;b]$, выведем формулу для вычисления площади криволинейной трапеции (см.рис.3). Из этого равенства видно, что *S(x)* есть первообразная для $f(x)$ на промежутке $[a;b]$. Пусть $F(x)$ – другая первообразная для $f(x)$ на этом же промежутке. В силу основного свойства первообразной имеем $S(x) = F(x) + C$.

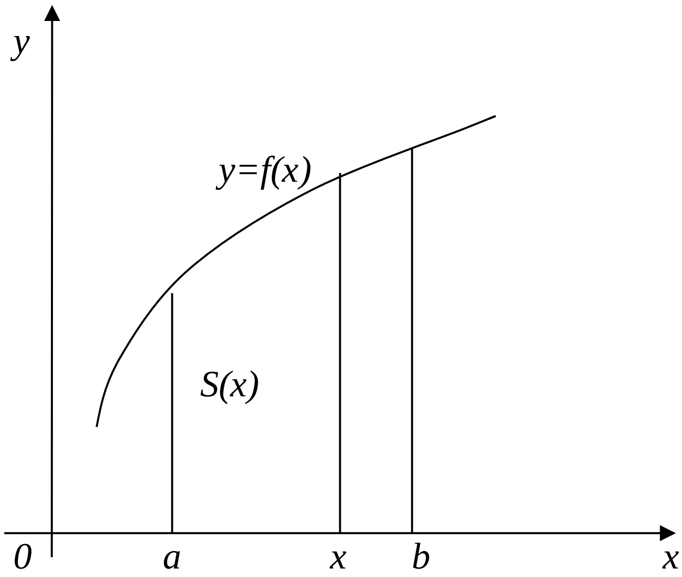


рис.3

Последнее равенство верно при всех $x \in [a;b]$, так как функции *S(x)* и $F(x)$ определены в точках *a* и *b*. Подставив вместо *x* число *a*, получим $S(a) = F(a) + C$. Но $S(a) = 0$, поэтому $0 = F(a) + C$, откуда $C = -F(a)$.
Таким образом, $S(x) = F(x) - F(a)$.
Подставив в последнее равенство $x = b$, найдем искомую площадь:

$$\boxed{S = F(b) - F(a)} \quad (1)$$

Напомним, что приращением аргумента *x* при его изменении от $x = a$ до $x = b$ называется разность $b - a$, а приращением функции $F(x)$ при изменении аргумента от $x = a$ до $x = b$ называется разность $F(b) - F(a)$.
Найдем приращение любой первообразной функции $f(x)$ при изменении аргумента от $x = a$ до $x = b$:

$$\left(F(x) + C\right)_{x=b} - \left(F(x) + C\right)_{x=a} = F(b) - F(a)$$

Полученный результат означает, что при изменении *x* от $x = a$ до $x = b$ все первообразные для данной функции имеют одно и то же приращение, равное $F(b) - F(a)$.
Это приращение принято называть определенным интегралом.
<u>Определение.</u> Если $F(x) + C$ – первообразная функция для $f(x)$, то приращение $F(b) - F(a)$ первообразных функций при изменении

аргумента x от $x = a$ до $x = b$ называется определенным интегралом и обозначается символом $\int_a^b f(x)dx$, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где a – нижний предел, а b – верхний предел определенного интеграла.
Символ читается так: *«определенный интеграл от a до b эф от икс дэ икс».*
Функция $f(x)$ предполагается непрерывной в промежутке изменения аргумента x от a до b.

Для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ находят:

1) неопределенный интеграл $\int f(x)dx = F(x) + C$;
2) значение интеграла $F(x) + C$ при $x = b$, *C=0*, т.е. вычисляют $F(b)$;
3) значение интеграла $F(x) + C$ при $x = a$, *C=0*, т.е. вычисляют $F(a)$;
4) разность $F(b) - F(a)$.

Процесс вычисления виден из формулы:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)/_a^b = F(b) - F(a)} \qquad \textbf{(2)}$$

Равенство (2) называется формулой Ньютона-Лейбница.

Замечания.

1. *Под $F(x)$ в формуле (2) понимают простейшую из первообразных функций, у которой C=0.*
2. *Так как приращение $F(b) - F(a)$ равно некоторому числу, то определенный интеграл есть число (в отличие от неопределенного интеграла, который, как известно, есть совокупность функций).*

Все методы интегрирования, используемые при нахождении неопределенных интегралов, применяются и при вычислении определенных интегралов. Числовое значение определенного интеграла зависит от вида функции, стоящей под знаком интеграла, и от значений верхнего и нижнего пределов и не зависит от обозначения переменной.
Если формулу Ньютона-Лейбница сравнить с формулой (1), то, очевидно, что $\int_a^b f(x)dx$ и есть площадь криволинейной трапеции, определяемой графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Таким образом, если функция $f(x)$ положительна, то определенный интеграл представляет собой площадь криволинейной трапеции. В этом заключается геометрический смысл определенного интеграла.
Тогда площадь криволинейной трапеции можно вычислить по формуле

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx} \qquad (3)$$

Простейшие свойства определенного интеграла

Рассмотрим основные свойства определенного интеграла. При этом мы будем предполагать, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$.

1. *При перестановке пределов интегрирования знак интеграла меняется на противоположный:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx} \qquad (1).$$

Доказательство: Пусть $f(x) = F'(x)$ и, значит, $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Тогда $\int_a^b f(x)dx = F(x)/_a^b = F(b) - F(a)$; (2)

$$-\int_b^a f(x)dx = -F(x)/_b^a = -\big(F(a) - F(b)\big) = F(b) - F(a). \quad (3)$$

Правые части равенств (2) и (3) равны; следовательно, должны быть равны и левые части, т.е. справедливо соотношение (1).
Это свойство позволяет рассматривать интегралы, в которых верхний предел меньше нижнего.

2. *Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла, т.е.*

$$\boxed{\int_a^b mf(x)dx = m\int_a^b f(x)dx}, \qquad (4),$$

где m - *постоянная величина.*

Доказательство: Пусть $f(x) = F'(x)$ и, следовательно, $\int f(x)dx = F(x) + C$. Тогда $\int_a^b f(x)dx = F(x)/_a^b = F(b) - F(a)$, (5)

$mf(x) = mF'(x)$. (6)

Из равенства (6) получим $mf(x) = (mF(x))'$, откуда

$$\int_a^b mf(x)dx = \int_a^b mF'(x)dx = \big(mF(x)\big)/_a^b = mF(b) - mF(a) = m\big(F(b) - F(a)\big)$$
.

Но из равенства (5) следует $m\big(F(b) - F(a)\big) = m\int_a^b f(x)dx$ и значит, справедливо соотношение (4).

3. *Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций, т.е.*

$$\boxed{\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx} \qquad (7)$$

Доказательство: Пусть $f(x) = F'(x)$ и $g(x) = G'(x)$. Тогда

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b \left(F'(x) \pm G'(x)\right)dx = \int_a^b \left(F(x) \pm G(x)\right)' dx = \left(F(x) \pm G(x)\right)\Big/_a^b =$$

$$= \left(F(b) \pm G(b)\right) - \left(F(a) \pm G(a)\right) = \left(F(b) - F(a)\right) \pm \left(G(b) - G(a)\right)$$

или $\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

Аналогично можно доказать справедливость этого свойства для любого конечного числа слагаемых.

4. *Если a, b, c принадлежат интервалу, на котором функция* $f(x)$ *непрерывна, то*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx} \qquad (8).$$

Доказательство: Пусть $F(x)$ – первообразная функция для $f(x)$. Тогда

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

.

<u>Вычисление определенного интеграла</u>

1. $\int_{-1}^{1} \left(2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4\right)dx = \left(x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right)\Big|_{-1}^{1} =$

$\Big| = \left(1^2 + 1^3 + 1^4 + 1^5\right) - \left((-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5\right) = 4$

2. $\int_1^4 \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^4 \left(\sqrt{x} + 1\right)dx = \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} + x\right)\Bigg|_1^4 =$

$= \frac{2}{3} \cdot 4^{3/2} + 4 - \left(\frac{2}{3} \cdot 1^{3/2} + 1\right) == \frac{2^4}{3} + 4 - \frac{2}{3} - 1 = \frac{14}{3} + 3 = \frac{23}{3} = 7\frac{2}{3}$

3. $\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^2 - e^0\right) = 0{,}5 \cdot (7{,}36 - 1) \approx 3{,}18$

4. $\int_0^1 \frac{du}{u+1} = \ln(u+1)\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0{,}69$

5. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$

6. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = arctgx \Big|_0^{\sqrt{3}} = arctg\sqrt{3} - arctg0 = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}$

Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур

Правило вычисления площадей плоских фигур

Как известно, определенный интеграл от непрерывной неотрицательной функции равен площади соответствующей криволинейной трапеции (геометрический смысл определенного интеграла):

$$\boxed{S = \int\limits_a^b f(x)dx}.$$

С помощью определенного интеграла можно также вычислять площади плоских фигур, так как эта задача всегда сводится к вычислению площадей криволинейных трапеций.

Площадь всякой плоской фигуры в прямоугольной системе координат может быть составлена из площадей криволинейных трапеций, прилегающих к оси Ox или к оси Oy.

Задачи на вычисление площадей плоских фигур удобно решать по следующему плану:

1. По условию задачи делают схематический чертеж.
2. Представляют искомую площадь как сумму или разность площадей криволинейных трапеций. Из условия задачи и чертежа определяют пределы интегрирования для каждой составляющей криволинейной трапеции.
3. Записывают каждую функцию в виде $y = f(x)$.
4. Вычисляют площади каждой криволинейной трапеции и площадь искомой фигуры.

1) Площади фигур, расположенных над осью Ox

Пусть на отрезке $[a;b]$ функция $y = f(x)$ принимает неотрицательные значения, т.е. $f(x) \geq 0$ для любого $x \in [a;b]$. Тогда график функции $y = f(x)$ расположен над осью Ox.

Если фигура, расположенная над осью Ox, является криволинейной трапецией (см.рис.3), то ее площадь вычисляется по известной формуле

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx} \text{ или } \boxed{S = \int_a^b ydx},$$

где y находится из уравнения кривой.

Если рассматриваемая фигура не является криволинейной трапецией, то искомую площадь следует представить как сумму (рис.4) или разность (рис.5) площадей криволинейный трапеций S_1 и S_2 и находить по общему правилу.

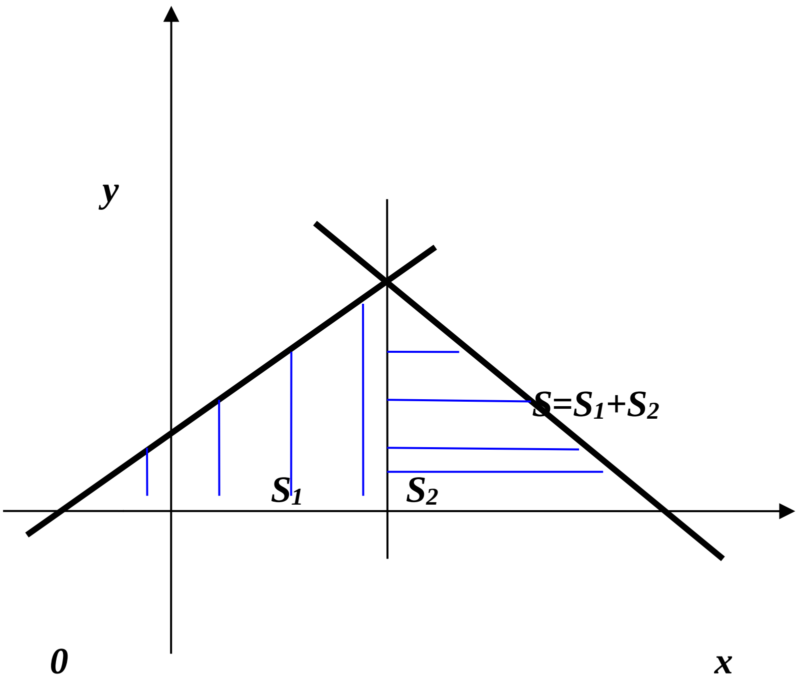
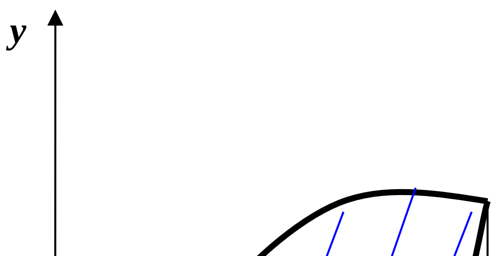


рис.4



S_1=S_{am1b}; S_2=S_{am2b}

m_1   ***S=S_1-S_2***

m_2

0   a   b   x

рис.5

2) Площади фигур, расположенных полностью или частично над осью Ox

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана неположительная непрерывная функция $y = f(x)$, т.е. $f(x) \le 0$ для любого $x \in [a;b]$. Тогда график функции расположен под осью Ox.

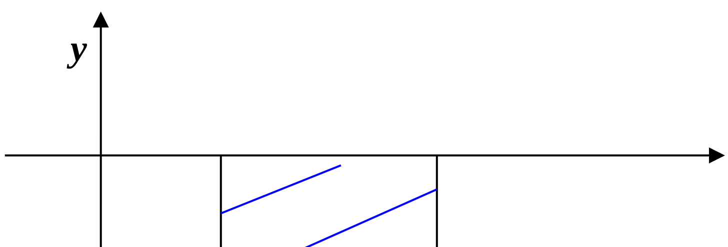
Если фигура, расположенная под осью Ox, является криволинейной трапецией (см.рис.6), то ее площадь вычисляется по известной формуле

$$\boxed{S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|} \text{ или } \boxed{S = \left| \int_a^b ydx \right|},$$

где *y* находится из уравнения кривой.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на этом отрезке как положительные, так и отрицательные значения. Тогда нужно разбить отрезок $[a;b]$ на такие части, в каждом из которых функция не изменяет знак, затем по приведенным выше формулам вычислить соответствующие этим частям площади и найденные площади сложить. Например, площадь фигуры, изображенной на рис.7, такова:

$$\boxed{S = \left|\int_a^c f(x)dx\right| + \int_c^b f(x)dx}$$



0 a b x

y=f(x)

рис.6

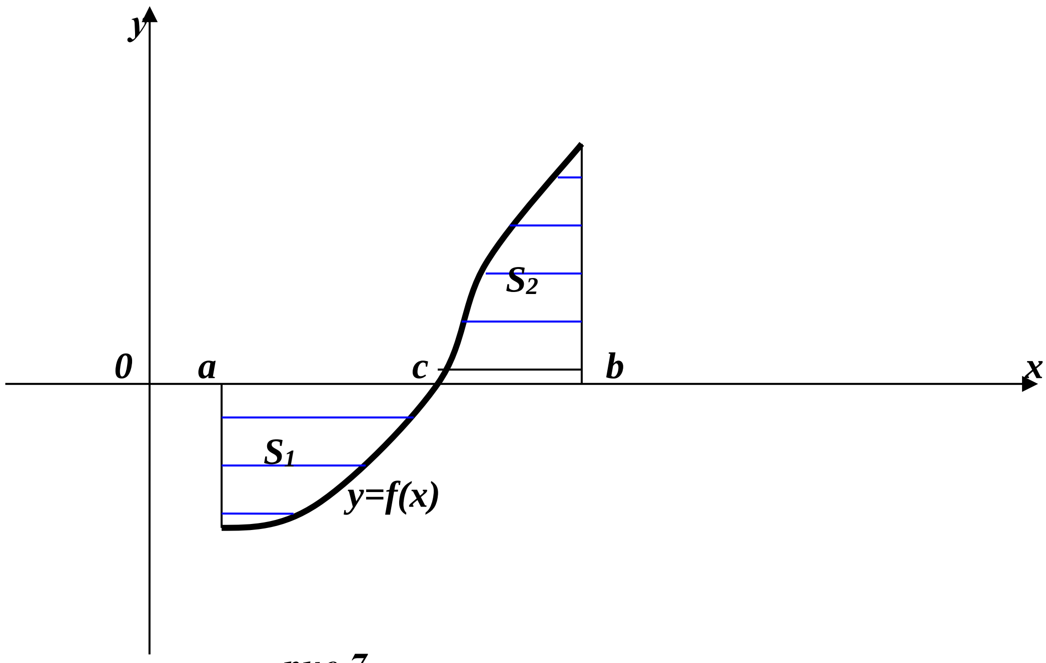


рис.7

3) Площади фигур, прилегающих к оси Oy

Если криволинейная трапеция прилегает к оси ординат и ограничена непрерывной кривой $x = f(y)$, прямыми $y = a$, $y = b$ и осью Oy (рис.8), то ее площадь вычисляется по формуле

$$\boxed{S=\int_a^b f(y)dy}$$

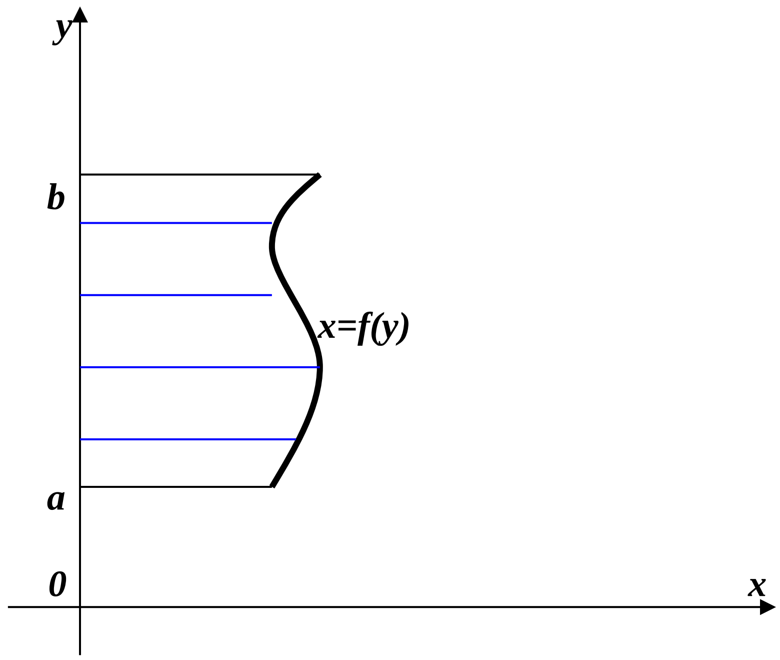


рис.8

4) Симметрично расположенные плоские фигуры

Если кривая расположена симметрично относительно оси координат или начала координат, то можно упростить вычисления, определив половину площади и затем удвоив результат. ***рис.9***