Практическая работа № 40

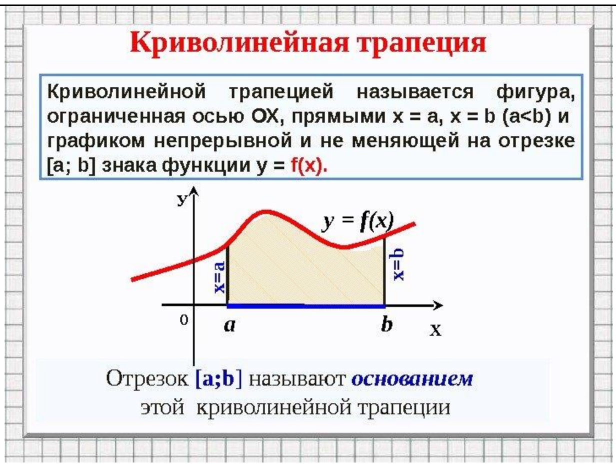
Вычисление площади криволинейной трапеции

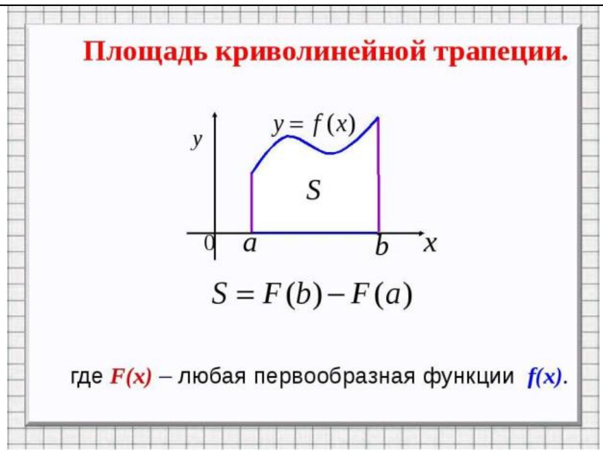
Цель : закрепление навыков умения вычислять площадь криволинейной трапеции при помощи интегралов; развитие логического мышления, памяти, внимания и самостоятельности

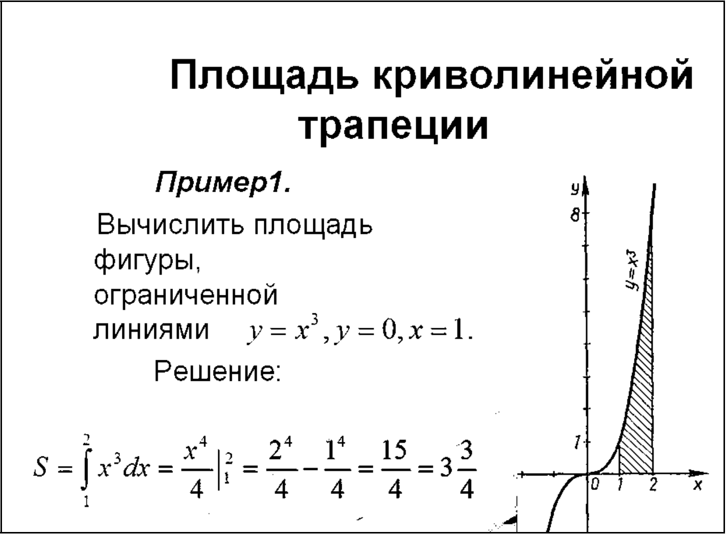
Форма работы: решение примеров
Время выполнения: 2ч
Контроль выполнения: проверка тетради
Порядок выполнения работы:
1. Повторить теоретический материал и изучить образцы решения примеров
2. Выполнить задания практической работы.

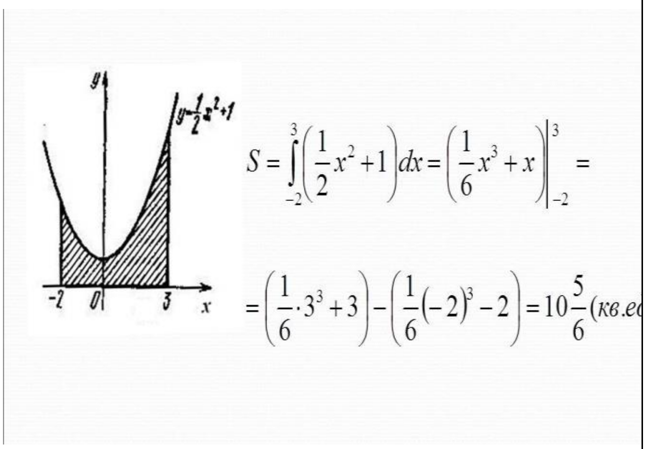
Методические указания

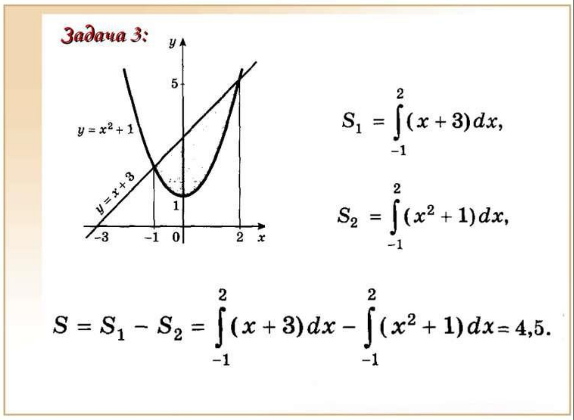
Теоретический материал

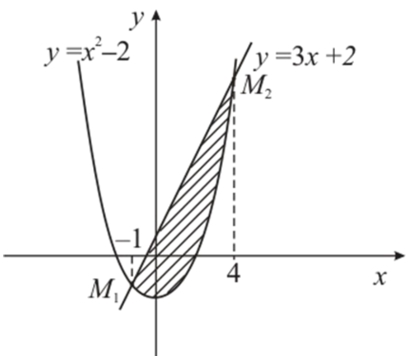












Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=x^2-2,\; y=3x+2.$$

Решение. Построим схематический рисунок (рис.). Для построения параболы возьмем несколько точек:

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4

y	–2	–1	–1	2	2	7	7	14	14

Для построения прямой достаточно двух точек, например $(0,\,2)$ и $(-1,\,-1)$.

Найдем координаты точек M_1 и M_2 пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = 3x + 2$.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \;\; x_2 = 4.$$

Тогда $y_1 = 3 \cdot (-1) + 2 = -1, \;\; y_2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14.$ Итак, $M_1(-1,-1), \;\; M_2(4,14).$

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (8), в которой

$f_2(x) = 3x + 2, \;\; f_1(x) = x^2 - 2,$ поскольку $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [-1, 4]$. Получим:

$$S = \int_{-1}^{4} \left(3x + 2 - \left(x^2 - 2\right)\right) dx = \int_{-1}^{4} \left(3x - x^2 + 4\right) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{4} =$$

$$= \frac{3 \cdot 4^2}{2} - \frac{4^3}{3} + 4 \cdot 4 - \left(\frac{3 \cdot (-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 4 \cdot (-1)\right) = 24 - \frac{64}{3} + 16 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 4 =$$

$$= 44 - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6} \; (\text{кв.ед.})$$

Задания практической работы:

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) $y = x^2 - 2, \;\; y = 1 - 2x$

2) $y = x^3, \quad y = 8, \quad x = 0$

3) $y = x^2, \;\; y = x + 1$

4) $y = x^2, \;\; y = 2 - x^2$

5) $y = x^2 - 1, \;\; y = 1 - x$

Вычисление объемов тел вращения

Если тело образовано вращением вокруг оси ОХ криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью ОХ и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 5), то его объем вычисляется по формуле:

$$V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx. \qquad (12)$$

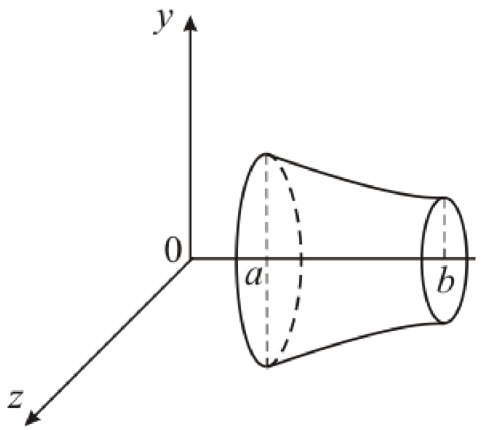


Рис. 5

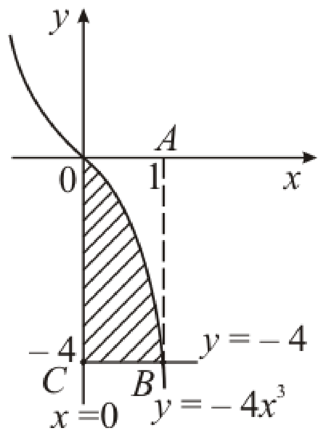


Рис. 6

Пример. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями: $y = -4x^3$, $x = 0$, $y = -4$.

Решение. Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис. 6).

Чтобы получить объем тела вращения из объема V_1 тела, полученного вращением фигуры ОАВС, вычтем объем V_2 тела, полученного вращением фигуры ОАВ. Тогда искомый объем $V = V_1 - V_2$. По формуле (12) найдем V_1 и V_2: $\quad V_1 = \pi\int_0^1 (-4)^2 dx = \pi 16x\Big|_0^1 = 16\pi$ (ед. объема);

$$V_2 = \pi\int_0^1 \left(-4x^3\right)^2 dx = 16\pi\int_0^1 x^6 dx = 16\pi\frac{x^7}{7} = \frac{16\pi}{7} \text{ (ед. объема)};$$

$$V = V_1 - V_2 = 16\pi - \frac{16\pi}{7} = \frac{96}{7}\pi \approx 43{,}085 \text{ (ед. объема)}.$$