

Практическая работа № 40

Вычисление площади криволинейной трапеции

Цель : закрепление навыков умения вычислять площадь криволинейной трапеции при помощи интегралов; развитие логического мышления, памяти, внимания и самостоятельности

Форма работы: решение примеров

Время выполнения: 2ч

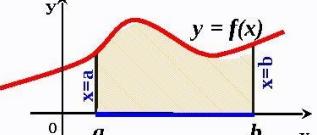
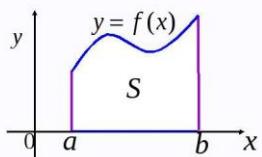
Контроль выполнения: проверка тетради

Порядок выполнения работы:

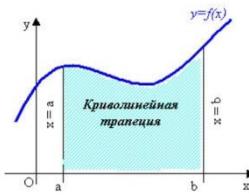
1. Повторить теоретический материал и изучить образцы решения примеров
2. Выполнить задания практической работы.

Методические указания

Теоретический материал

<p>Криволинейная трапеция</p> <p>Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная осью ОХ, прямыми $x = a$, $x = b$ ($a < b$) и графиком непрерывной и не меняющей на отрезке $[a; b]$ знака функции $y = f(x)$.</p>  <p>Отрезок $[a;b]$ называют основанием этой криволинейной трапеции</p>	<p>Площадь криволинейной трапеции.</p>  $S = F(b) - F(a)$ <p>где $F(x)$ – любая первообразная функции $f(x)$.</p>
---	--

Площадь криволинейной трапеции



$$S = F(b) - F(a)$$

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

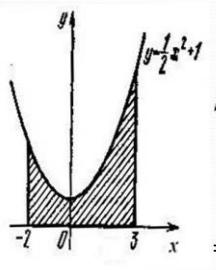
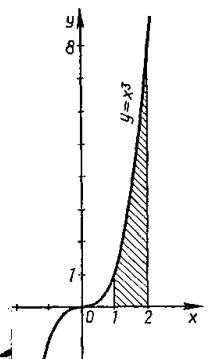
Площадь криволинейной трапеции

Пример 1.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$.

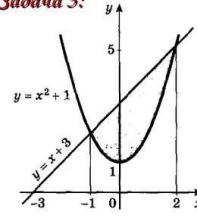
Решение:

$$S = \int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$



$$S = \int_{-2}^3 \left(\frac{1}{2}x^2 + 1 \right) dx = \left(\frac{1}{6}x^3 + x \right) \Big|_{-2}^3 = \left(\frac{1}{6} \cdot 3^3 + 3 \right) - \left(\frac{1}{6}(-2)^3 - 2 \right) = 10\frac{5}{6} \text{ (кв.ед.)}$$

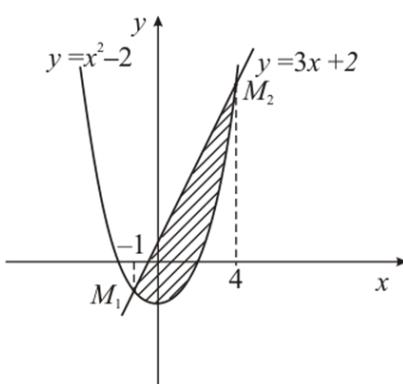
Задача 3:



$$S_1 = \int_{-1}^2 (x + 3) dx,$$

$$S_2 = \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx,$$

$$S = S_1 - S_2 = \int_{-1}^2 (x + 3) dx - \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx = 4,5.$$



Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 2, \quad y = 3x + 2.$$

Решение. Построим схематический рисунок (рис.). Для построения параболы возьмем несколько точек:

x	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4
---	---	---	----	---	----	---	----	---	----

y	-2	-1	-1	2	2	7	7	14	14
---	----	----	----	---	---	---	---	----	----

Для построения прямой достаточно двух точек, например $(0, 2)$ и $(-1, -1)$.

Найдем координаты точек M_1 и M_2 пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = 3x + 2$.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$$

Тогда $y_1 = 3 \cdot (-1) + 2 = -1$, $y_2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14$. Итак, $M_1(-1, -1)$, $M_2(4, 14)$.

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (8), в которой

$f_2(x) = 3x + 2$, $f_1(x) = x^2 - 2$, поскольку $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [-1, 4]$. Получим:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^4 (3x + 2 - (x^2 - 2)) dx = \int_{-1}^4 (3x - x^2 + 4) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_{-1}^4 = \\ &= \frac{3 \cdot 4^2}{2} - \frac{4^3}{3} + 4 \cdot 4 - \left(\frac{3 \cdot (-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 4 \cdot (-1) \right) = 24 - \frac{64}{3} + 16 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 4 = \\ &= 44 - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6} \text{ (кв.ед.)} \end{aligned}$$

Задания практической работы:

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) $y = x^2 - 2$, $y = 1 - 2x$

2) $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$

3) $y = x^2$, $y = x + 1$

4) $y = x^2$, $y = 2 - x^2$

5) $y = x^2 - 1$, $y = 1 - x$

Вычисление объемов тел вращения

Если тело образовано вращением вокруг оси ОХ криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью ОХ и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 5), то его объем вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx. \quad (12)$$

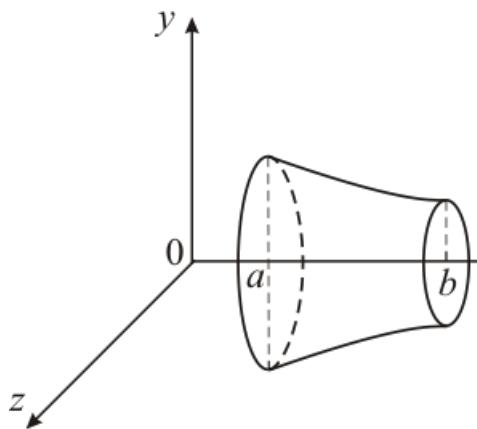


Рис. 5

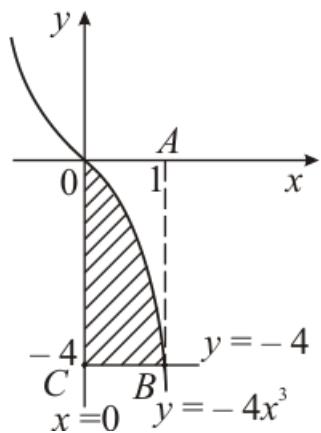


Рис. 6

Пример. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями: $y = -4x^3$, $x = 0$, $y = -4$.

Решение. Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис. 6).

Чтобы получить объем тела вращения из объема V_1 тела, полученного вращением фигуры ОАВС, вычтем объем V_2 тела, полученного вращением фигуры ОАВ. Тогда искомый объем $V = V_1 - V_2$. По формуле (12) найдем V_1 и

$$V_1: \quad V_1 = \pi \int_0^1 (-4)^2 dx = \pi 16x \Big|_0^1 = 16\pi \text{ (ед. объема);}$$

$$V_2 = \pi \int_0^1 (-4x^3)^2 dx = 16\pi \int_0^1 x^6 dx = 16\pi \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 = \frac{16\pi}{7} \text{ (ед. объема);}$$

$$V = V_1 - V_2 = 16\pi - \frac{16\pi}{7} = \frac{96}{7}\pi \approx 43,085 \text{ (ед. объема).}$$