28 мая 2020г. Записываем лекцию. Выполняем практическую работу. Высылаем на электронную почту: alevtina_sokolov@mail.ru

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции на отрезке *[a;b]*.

Запишем алгоритм, позволяющий находить наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

1. Находим область определения функции и проверяем, содержится ли в ней весь отрезок *[a;b]*.
2. Находим все точки, в которых не существует первая производная и которые содержатся в отрезке *[a;b]* (обычно такие точки встечаются у функций с аргументом под знаком модуля и у степенных функций с дробно-рациональным показателем). Если таких точек нет, то переходим к следующему пункту.
3. Определяем все стационарные точки, попадающие в отрезок *[a;b]*. Для этого, находим производную функции, приравниваем ее к нулю, решаем полученное уравнение и выбираем подходящие корни. Если стационарных точек нет или ни одна из них не попадает в отрезок, то переходим к следующему пункту.
4. Вычисляем значения функции в отобранных стационарных точках (если такие имеются), в точках, в которых не существует первая производная (если такие имеются), а также при *x=a* и *x=b*.
5. Из полученных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее - они и будут искомыми наибольшим и наименьшим значениями функции соответственно.

Разберем алгоритм при решении примера на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

Пример.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y=\frac{x^3+4}{x^2}$

- на отрезке *[1;4]*;
- на отрезке *[-4;-1]*.

Решение.

Областью определения функции является все множество действительных чисел, за исключением нуля, то есть $D(y):\quad x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Оба отрезка попадают в область определения.

Находим производную функции по правилу дифференцирования дроби:

$$y' = \left(\frac{x^3+4}{x^2}\right)' = \frac{\left(x^3+4\right)' \cdot x^2 - \left(x^3+4\right) \cdot \left(x^2\right)'}{x^4} =$$

$$= \frac{3x^2 \cdot x^2 - \left(x^3+4\right) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x^3-8}{x^3}$$

Очевидно, производная функции существует во всех точках отрезков *[1;4]* и *[-4;-1]*.

Стационарные точки определим из уравнения $\frac{x^3-8}{x^3}=0$. Единственным действительным корнем является *x=2*. Эта стационарная точка попадает в первый отрезок *[1;4]*.

Для первого случая вычисляем значения функции на концах отрезка и в стационарной точке, то есть при *x=1*, *x=2* и *x=4*:

$$y(1) = \frac{1^3+4}{1^2} = 5$$

$$y(2) = \frac{2^3+4}{2^2} = 3$$

$$y(4) = \frac{4^3+4}{4^2} = 4\frac{1}{4}$$

Следовательно, наибольшее значение функции $\max\limits_{x\in[1;\,4]} y = y(1) = 5$ достигается при *x=1*, а наименьшее значение $\min\limits_{x\in[1;\,4]} y = y(2) = 3$ – при *x=2*.

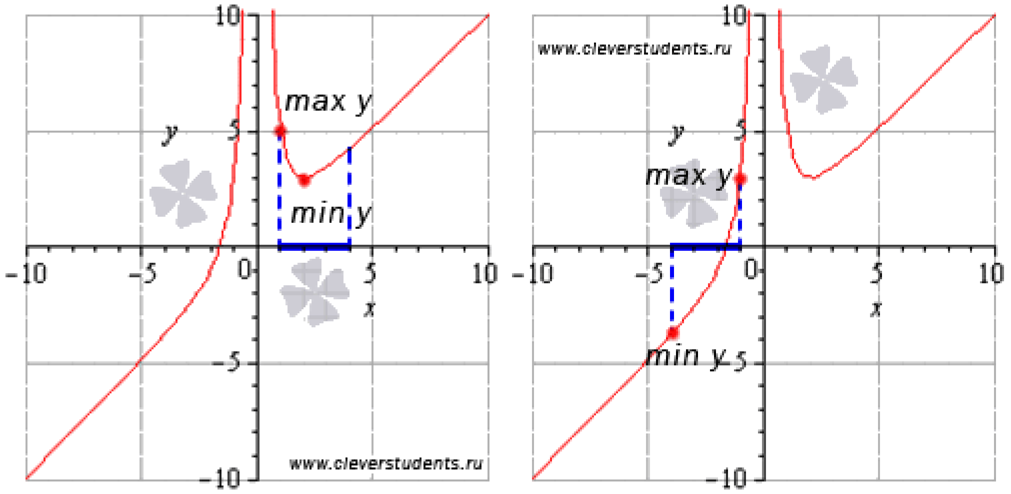
Для второго случая вычисляем значения функции лишь на концах отрезка *[-4;-1]* (так как он не содержит ни одной стационарной точки):

$$y(-4) = \frac{(-4)^3+4}{(-4)^2} = -3\frac{3}{4}$$

$$y(-1) = \frac{(-1)^3+4}{(-1)^2} = 3$$

Следовательно, $\max\limits_{x\in[-4;\,-1]} y = y(-1) = 3, \quad \min\limits_{x\in[-4;\,-1]} y = y(-4) = -3\frac{3}{4}$.

Графическая иллюстрация.



для отрезка [1; 4] для отрезка [-4; -1]

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Миниатюрная и довольно простая задача из разряда тех, которые служат спасательным кругом плавающему студенту. На природе сонное царство середины июля, поэтому самое время устроиться с ноутбуком на пляже. Ранним утром заиграл солнечный зайчик теории, чтобы в скором времени сфокусироваться на практике, которая, несмотря на заявленную лёгкость, содержит осколки стекла в песке. В этой связи рекомендую добросовестно рассмотреть немногочисленные примеры этой странички. Для решения практических заданий необходимо уметь **находить производные** и понимать материал статьи **Интервалы монотонности и экстремумы функции**.

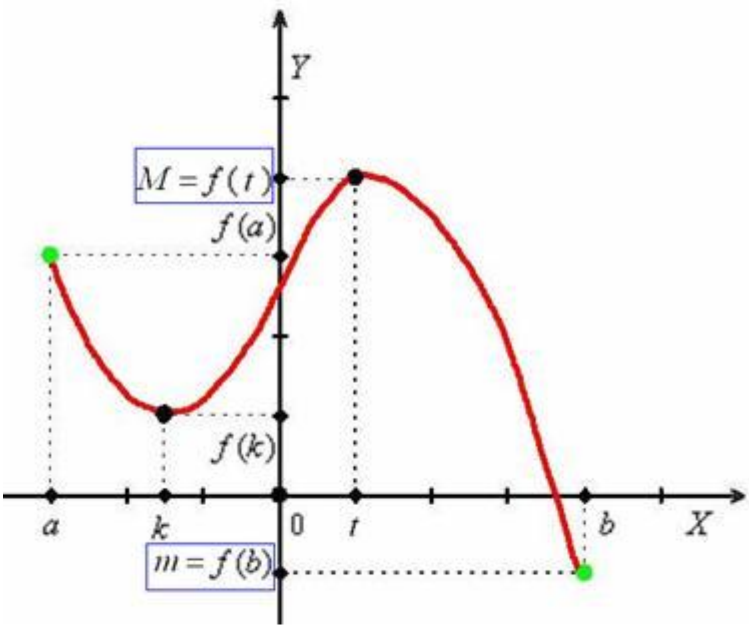
Сначала коротко о главном. На уроке о **непрерывности функции** я приводил определение непрерывности в точке и непрерывности на интервале. Образцово-показательное поведение функции на отрезке формулируется похожим образом. Функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ если:

1) она непрерывна на интервале $(a; b)$;
2) непрерывна в точке a *справа* и в точке b *слева*.

Во втором пункте речь зашла о так называемой *односторонней непрерывности* функции в точке. Существует несколько подходов к её определению, но я буду придерживаться начатой ранее линии:

Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке a *справа*, если она определена в данной точке и её правосторонний предел совпадает со значением функции в данной точке: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$. Она же непрерывна в точке b *слева*, если определена в данной точке и её левосторонний предел равен значению в этой точке: $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = f(b)$

Представьте, что зелёные точки – это гвозди, на которых закреплена волшебная резинка:



Пример 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 3$ на отрезке $[-1; 2]$

Решение:
1) Вычислим значения функции в критических точках, принадлежащих данному отрезку:
$f'(x) = (2x^3 - 12x^2 + 18x + 3)' = 6x^2 - 24x + 18 = 6(x^2 - 4x + 3) = 0$

Полученное **квадратное уравнение** имеет два действительных корня:
$x_1 = 1, x_2 = 3$ – критические точки.

Ещё раз подчёркиваю, что нас не интересует, есть в них максимумы/минимумы или нет.

Первая критическая точка принадлежит данному отрезку: $x_1 = 1 \in [-1; 2]$
А вот вторая – нет: $x_2 = 3 \notin [-1; 2]$, поэтому про неё сразу забываем.

Вычислим значение функции в нужной точке:
$f(x_1) = f(1) = 2\cdot 1^3 - 12\cdot 1^2 + 18\cdot 1 + 3 = 2 - 12 + 18 + 3 = \mathbf{11}$

Итоговый результат я выделил жирным цветом, при оформлении задания в тетради его удобно обвести в кружок простым карандашом или пометить как-то по-другому.

2) Вычислим значения функции на концах отрезка:

$f(-1) = 2\cdot(-1)^3 - 12\cdot(-1)^2 + 18\cdot(-1) + 3 = -2 - 12 - 18 + 3 = \mathbf{-29}$

$f(2) = 2\cdot 2^3 - 12\cdot 2^2 + 18\cdot 2 + 3 = 16 - 48 + 36 + 3 = \mathbf{7}$

Результаты опять каким-либо образом выделяем.

3) Дело сделано, среди «жирных» чисел выбираем наибольшее и наименьшее.

Ответ: $\max\limits_{[-1;\,2]} f(x) = f(1) = 11, \quad \min\limits_{[-1;\,2]} f(x) = f(-1) = -29$

Практическая работа № 33

Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке

Цель : закрепление навыков умения применять производную при нахождении наибольшего и наименьшего значения функции; развитие логического мышления, памяти, внимания и самостоятельности

Форма работы: решение примеров
Время выполнения: 2ч
Контроль выполнения: проверка тетради
Порядок выполнения работы:
1. Повторить теоретический материал и изучить образцы решения примеров
2. Выполнить задания практической работы.

Методические указания

Теоретический материал

Для нахождения наименьшего и наибольшего значений функции, непрерывной в некотором промежутке, необходимо:

1) найти критические точки, принадлежащие заданному промежутку, и вычислить значения функции в этих точках;

2) найти значения функции на концах промежутка;

3) сравнить полученные значения; тогда наименьшее и наибольшее из них являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции в рассматриваемом промежутке.

Пример .Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3$ на промежутке [-2; 0].

Решение:

вычислим критические точки функции, принадлежащие заданному промежутку, с помощью производной:

$$y' = 3 + 4x + x^2;$$
$$x^2 + 4x + 3 = 0;$$
$$D = 16 - 12 = 4;$$
$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2}{2};$$
$$x_1 = -1; \qquad x_2 = -3.$$

Т.к. $-3 \notin [-2;\ 0]$, $x=-1$ – критическая точка.

$$y(-1) = 3(-1) + 2(-1)^2 + \frac{1}{3}(-1)^3 = -3 + 2 - \frac{1}{3} = -1\frac{1}{3},\ \underline{y(-1) = -1\frac{1}{3}}.$$

Вычислим значения функции на концах промежутка:

$$y(-2) = 3(-2) + 2(-2)^2 + \frac{1}{3}(-2)^3 = -6 + 8 - \frac{8}{3} = 2 - 2\frac{2}{3} = -\frac{2}{3},\ \underline{y(-2) = -\frac{2}{3}}.$$

$$\underline{y(0)=0}.$$

Сравним полученные значения: наименьшее значение функции равно $-1\frac{1}{3}$ и достигается ею во внутренней точке промежутка, а наибольшее значение равно 0 и достигается на правом конце промежутка.

Задания практической работы:

Найдите наименьшее и наибольшее значения функций в заданных промежутках:

Вариант 1

1) $y = -6x + x^2 + 13$ на промежутке [0; 6];

2) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ на промежутке [-4; 4];

3) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ на промежутке [1; 3];

4) $y = -3x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ на промежутке [-5; 0].

Вариант 2. **Кому надо оценки 4 и 5**

1) $y = 6x^2 - x^3$ на промежутке [-1; 6];

2) $y = -24x + 9x^2 - x^3 + 10$ на промежутке [0; 3];

3) $y = x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3$ на промежутке [-4; -1];

4) $y = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ на промежутке [-3; 1];

ВАРИАНТ1

4) $y = -3x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \quad [-5; 0]$

$y' = -3 - \frac{1}{2}\cdot 2x + \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = -3 - x + x^2$

$y'(x) = 0, \quad x^2 - x - 3 = 0, \quad D = 1 - 4\cdot 1\cdot(-3) = 13$

$x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \approx 2{,}3 \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \approx -1{,}3 \in [-5; 0]$

$\approx 2{,}3 \notin [-5; 0]$

$y(-5) = 15 - \frac{1}{2}\cdot 25 + \frac{1}{3}\cdot(-125) = -39{,}1$ – наим

$y(0) = 0$ – наибол.

$y(-1{,}3) \approx 4{,}9 - \frac{1}{2}\cdot 1{,}69 + \frac{1}{3}(-2{,}197) = 4{,}055 - 0{,}73 = -3{,}32$

Ответ: $\max\limits_{[-5;0]} y(0) = 0$; $\min\limits_{[-5;0]} y(-5) = -39{,}1$

Практ. раб №33. Вар№1

№1 $y=-6x+x^2+13 \quad [0;6]$

$y'=-6+2x$

$y'(x)=0, \quad -6+2x=0$

$2x=6$

$x=3 \quad , 3\in[0,6]$

$y(0)=-6\cdot0+0^2+13=13$ } наибольшее

$y(6)=-6\cdot6+6^2+13=13$

$y(3)=-18+9+13=4.$ – наименьшее.

Ответ: $\max\limits_{[0;6]} y(0)=y(6)=13$; $\min\limits_{[0;6]} y(3)=13$

№2 $y=x^3-3x^2-9x+35 \quad [-4;4]$

$y'=3x^2-6x-9$

$y'(x)=0, \quad 3x^2-6x-9=0 \;|:3$

$x^2-2x-3=0$

$D=4-4\cdot1(-3)=16=4^2$, $x_1=\frac{2+4}{2}=3$, $x_2=\frac{2-4}{2}=-1$

$3\in[-4;4]$, $-1\in[-4;4]$

$y(-4)=(-4)^3-3(-4)^2-9(-4)+35=-41$ – наименьшее

$y(4)=4^3-4^2\cdot3-9\cdot4+35=15$

$y(3)=3^3-3\cdot3^2-9\cdot3+35=8$

$y(-1)=(-1)^3-3(-1)^2-9(-1)+35=40$ – наибольшее

Ответ: $\max\limits_{[-4;4]} y(-1)=40$; $\min\limits_{[-4;4]} y(-4)=-41$

№3 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3 \quad [1;3]$

$y'=\frac{1}{2}\cdot2x-\frac{1}{3}\cdot3x^2=x-x^2$

$y'(x)=0, \quad x-x^2=0 \Leftrightarrow x(1-x)=0$

$x=0$ или $x=1$

$0\notin[1;3]$ $\qquad 1\in[1;3]$

$y(1)=\frac{1^3}{2}-\frac{1^2}{3}=\frac{1}{6}$ – наибол.

$y(3)=\frac{1}{2}\cdot9-\frac{1}{3}\cdot27=\frac{9}{2}-9=-4,5$ – наим.

Ответ: