

## Занятие на тему «Показательные уравнения»

1. Внимательно прочитайте, изучите материал
2. Перепишите определение
3. Примеры переписывайте с подробными решениями
4. Самостоятельно решайте задания 19-26 (1 вариант – нечетные, 2 вариант – четные)
5. Отправляйте сканы рабочей тетради вконтакте <https://vk.com/nureeva79> Расима Нуреева 7.04.20

### Решение показательных уравнений разложением на множители

Этот способ используется в уравнениях, в левой части которых записана сумма или разность степеней с одним основанием.

Причем, если  $a > 1$ , выносятся степень с меньшим показателем; если  $0 < a < 1$  – степень с большим показателем.

**Пример 19.** Решите уравнение  $5^{2x+1} - 3 \cdot 5^{2x-1} = 550$ .

**Решение.** Вынесем в левой части уравнения  $5^{2x-1}$ .

Получим  $5^{2x-1}(5^2 - 3) = 550$ ;  $5^{2x-1} = 25 = 5^2$ ;  $2x - 1 = 2$ ,  $x = \frac{3}{2}$ .

**Ответ:**  $\frac{3}{2}$

**Пример 20.** Решите уравнение  $5^{x^2+3x-4} + 4 \cdot 5^{x^2+3x-4} = 5$ ; Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $[0; 2]$ .

**Решение.** Вынесем в левой части уравнения  $5^{x^2+3x-4}$  за скобки. Получим  $5^{x^2+3x-4}(1+4) = 5$ ;  $5^{x^2+3x-4} = 1 = 5^0$ ;  $x^2 + 3x - 4 = 0$ ;  $D = 25$ ,  $x_1 = -4$ ,  $x_2 = 1$ .

Промежутку  $[0; 2]$  принадлежит корень  $x_2 = 1$ .

**Ответ:**  $\{-4; 1\}; 1$

**Задание 11.** Решите уравнение...

- |                                    |   |  |
|------------------------------------|---|--|
| 1) $3^{x+2} - 2 \cdot 3^x = 7$     | 2) $2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x+3} = 33$               | 3) $4^{x+2} - 3 \cdot 4^x = 13$            |
| 4) $5^{x+2} + 11 \cdot 5^x = 180$  | 5) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$              | 6) $3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x = 39$          |
| 7) $5^x = 6 \cdot 5^x - 125$       | 8) $3 \cdot 4^x + 3 \cdot 4^{x+1} + 4^{x+2} = 62$ | 9) $3 \cdot 5^{x+3} + 2 \cdot 5^{x+1} = 7$ |
| 10) $2^{-x} + 2 \cdot 2^{-x} = 12$ |   |  |

**Пример 21.** Решите уравнение  $2 \cdot 3^{x-1} - 3^{x-2} = 5^{x-2} + 4 \cdot 5^{x-3}$ .

**Решение.** Вынесем в левой части уравнения  $3^{x-2}$ , в правой части  $5^{x-3}$  за скобки:  $3^{x-2}(2 \cdot 3 - 1) = 5^{x-3}(5 + 4)$ .

Получим  $3^{x-2} \cdot 5 = 5^{x-3} \cdot 3^2$ .

Разделим обе части этого уравнения на  $5 \cdot 3^2$  и получим  $3^{x-4} = 5^{x-4}$ . Заметим, что равны не основания, а показатели.

Разделим обе части этого уравнения на  $5^{x-4}$ . Тогда  $(\frac{3}{5})^{x-4} = 1$  или  $(\frac{3}{5})^{x-4} = (\frac{3}{5})^0$ . Отсюда  $x=4$ .

**Ответ:** 4

**Пример 22.** Решите уравнение  $2^{x^2-2x+1} + 2^{x^2-2x} = 6$ ; Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $[-1; 2]$ .

**Решение.** Вынесем в левой части уравнения  $2^{x^2-2x}$  за скобки. Получим  $2^{x^2-2x}(2^1 + 1) = 6$ ;  $2^{x^2-2x} = 2$ ;  $x^2 - 2x - 1 = 0$ ;  $D = 0$ ,  $x = 1$ .

Промежутку  $[-1; 2]$  принадлежит корень  $x = 1$ .

**Ответ:** 1; 1

**Пример 23.** Решите уравнение  $27^x - 5 \cdot 9^x - 3^{x+2} + 45 = 0$ ; Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $[\log_3 2; \log_3 7]$ .

**Решение.** Разложим левую часть уравнения на множители:  
 $27^x - 5 \cdot 9^x - 3^{x+2} + 45 = 0 \Leftrightarrow 27^x - 5 \cdot 9^x - 9 \cdot 3^x + 45 = 0 \Leftrightarrow 9^x(3^x - 5) - 9(3^x - 5) = 0 \Leftrightarrow$   
 $(9^x - 9)(3^x - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 9^x = 9, \\ 3^x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = \log_3 5 \end{cases}$

Промежутку  $[\log_3 2; \log_3 7]$  принадлежат оба корня:  $x = \log_3 5$  и 1 ( $1 = \log_3 3$ ).

**Ответ:**  $\{1; \log_3 5\}$ ;  $\{1; \log_3 5\}$

**Задание 12.** Решите уравнение...

1)  $4^{x+3} + 2^{2x+2} = 51$

2)  $9^x - 2^{x+0,5} = 2^{x+3,5} - 3^{2x-1}$

### Решение показательных уравнений заменой переменной

Уравнения вида  $Aa^{2x} + Ba^x + c = 0$  сводятся к решению квадратного уравнения  $At^2 + Bt + c = 0$  при помощи замены  $t = a^x, t > 0$ .

**Пример 24.** Решите уравнение  $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$ .

**Решение.** Положим  $5^x = y$ . Тогда  $5^{2x} = (5^x)^2 = y^2$  и данное уравнение примет вид  $y^2 - 6y + 5 = 0$ . Корни этого уравнения:  $y_1 = 1$ ;  $y_2 = 5$ . Следовательно,  $5^x = 1$ , т.е.  $x = 0$ , и  $5^x = 5$ , т.е.  $x = 1$ .

**Ответ: 1**

**Пример 25.** Решите уравнение  $9^{x-0,5} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$ ; Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $(1;3)$ .

**Решение.** Преобразуем исходное уравнение  $3 \cdot 9^{x-1} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$ . Получили квадратное уравнение относительно  $3^{x-1}$  с коэффициентами 3, - 8 и 5 и  $D=4$ .

$$\text{Отсюда } 3^{x-1} = \frac{8-2}{6} = 1, \quad x-1=0, \quad x=1; \quad 3^{x-1} = \frac{8+2}{6} = \frac{5}{3}, \quad x-1 = \log_3 \frac{5}{3}, \\ x = \log_3 \frac{5}{3} + 1 = \log_3 5.$$

Корень  $x=1$  не принадлежит промежутку  $(1;3)$ ; корень  $x = \log_3 5$  принадлежит промежутку  $(1;3)$  ( $1 < \log_3 5 < 2$ ).

**Ответ:**  $\{1; \log_3 5\}; \{1; \log_3 5\}$

**Задание 13.** Решите уравнение...

- 1)  $2^{2x} + 2^x - 2 = 0$       2)  $3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$       3)  $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$       4)  $100^x - 11 \cdot 10^x + 10 = 0$   
5)  $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$       6)  $4^x - 14 \cdot 2^x - 32 = 0$       7)  $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$       8)  $64^x - 8^x - 56 = 0$   
9)  $36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$       10)  $9^x + 3^{x+1} - 108 = 0$

**Пример 26.** Решить уравнение  $10 \cdot 2^x - 4^x = 16$ .

**Решение.** Перепишем это уравнение в виде  $10 \cdot 2^x - 2^{2x} - 16 = 0$  и введем новую переменную  $t=2^x$ .

Получим квадратное уравнение относительно переменной  $t$ :  $10t - t^2 - 16 = 0$ , откуда  $t_1=2$ ,  $t_2=8$ .

Этим значениям  $t$  соответствует два уравнения:  $2^x = 2$  и  $2^x = 8$ , откуда  $x=1$  и  $x=3$ .

**Ответ:** 1; 3

**Задание 14.** Решите уравнение...

1)  $3 \cdot 25^x - 14 \cdot 5^x - 5 = 0$

2)  $8 \cdot 4^x - 15 \cdot 2^x - 2 = 0$

3)  $9^{2x+1} = 2 - 17 \cdot 9^x$

4)  $4^{1+2x} = 2 - 7 \cdot 4^x$

5)  $16 \cdot 2^{x-1} = 4 \cdot 2^{2x}$

6)  $9 \cdot 3^{x+2} = 27 \cdot 3^{2x}$

7)  $4 \cdot 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$

8)  $3 \cdot 9^{2x} - 10 \cdot 9^x + 3 = 0$

9)  $2 \cdot 3^{x+1} + 9^x = 27$

10)  $3^x - 8 \cdot 3^{x/2} + 15 = 0$