

# "Площадь криволинейной трапеции"

## Цели урока:

1. Обучающая цель: создать условия для формирования представления о площади криволинейной трапеции и интеграле.
2. Развивающая цель: развивать логическое мышление школьников через установление причинно-следственных связей.
3. Мотивационная цель: побудить интерес к изучению предмета.

## Задачи урока:

1. Воспитательная – развитие познавательного интереса, логического мышления.
2. Учебная – ввести и закрепить понятие криволинейной трапеции, площадь криволинейной трапеции, нахождение площади фигуры.
3. Развивающая – развитие логического мышления, памяти, внимательности.

## Подготовка к уроку:

1. Домашнее задание:
2. Подготовить презентацию и рисунки для устной работы, теста
3. Для выполнения теста у учеников должны быть тетради для самостоятельной работы или листы бумаги

## План урока:

Содержание этапов урока	Виды и формы работы
1. Организационный момент	Приветствие
2. Мотивационное начало урока	Постановка цели урока
3. Работа по повторению ранее изученного материала	Выполнение заданий
4. Проверка домашнего задания	Проверка правильности выполнения заданий
5. Решение заданий, домашнее задание	Письменная работа в рабочих тетрадях
6. Работа по тесту	Работа в тетрадях для самостоятельной работы
7. Подведение итогов урока	

## Ход урока

### 1. Организационный момент

### 2. Мотивационное начало урока

Учитель: Здравствуйте, тема нашего сегодняшнего урока: Площадь криволинейной трапеции. Цель нашего урока – узнать какая фигура называется криволинейной трапецией, как находится площадь криволинейной трапеции, выполнить задания из учебника и решить тестовое задание на оценку.

### 3. Работа по повторению ранее изученного материала

На доске: Найти первообразную функции:

$$a) f(x) = 2 \sin x = 3 \cos x$$

$$\bar{b}) f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + x^2 \quad \text{на } (0; +\infty)$$

$$1) \bar{b}) f(x) = 4x^3 - 6x$$

$$\bar{z}) f(x) = 7$$

$$\partial) f(x) = 1 + \frac{1}{\cos^2 x}$$

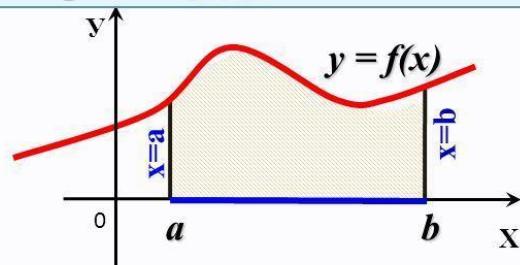
$$a) f(x) = \frac{3 - 8x}{\sqrt{8x + 1} + 2}$$

2\*)

$$\bar{d}) f(x) = \cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \sin \frac{x}{4}$$

## Криволинейная трапеция

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей на отрезке  $[a;b]$  знака функции  $f(x)$ , прямыми  $x=a$ ,  $x=b$  и отрезком  $[a;b]$ .



Отрезок  $[a;b]$  называют *основанием*  
этой криволинейной трапеции

MyShared

Виды криволинейных трапеций



В рисунке Д) Криволинейная трапеция будет иметь отрицательное значение т.к. рисунок (функция) располагается под осью ОХ.

4. Как найти площадь криволинейной трапеции?

### задание 1

Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной :  
графиком функции  $f(x) = x^2$  и прямыми  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ .

**Алгоритм решения:**

1. Начертим все линии. Заштрихуем образованную ими криволинейную трапецию. Сделаем запись:  
Фигура является криволинейной трапецией

2. Найдём одну из первообразных функции  $f(x) = x^2$ :

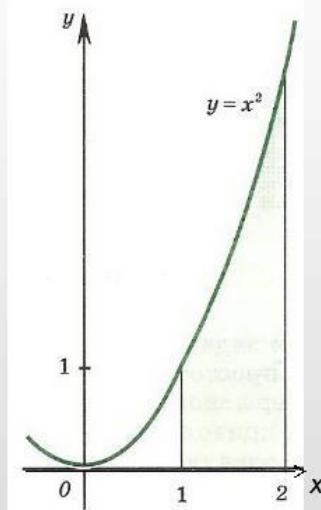
$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

3. По чертежу определим значения  $a$  и  $b$

$$a = 1 \quad b = 2$$

4. Подставим полученные значения в формулу для нахождения площади криволинейной трапеции и вычислим

$$S \text{ к.м.} = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3} \text{ (кв.ед.)}$$



### Пошаговый пример

**Пример:** Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями

$$y = 4 - x^2 \text{ и } y = 0$$

**Решение:**

1. Построим криволинейную трапецию:

$y = 4 - x^2$  - квадратичная функция, график – парабола, ветви направлены вниз.  
 $y = 0$  - ось абсцисс.

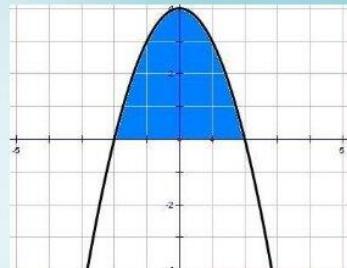
2. Найдём  $[a; b]$ :

$$4 - x^2 = 0; x^2 = 4  
x = -2 \text{ или } x = 2, \text{ т. е. } a = -2 \text{ } b = 2$$

3. Найдём площадь криволинейной трапеции по формуле:

$$S = F(b) - F(a)$$

$$S = F(2) - F(-2) = \underline{10,6}.$$



## Вычислите площадь криволинейной трапеции 2-мя способами

1) Используя формулу площади трапеции из геометрии, получим:

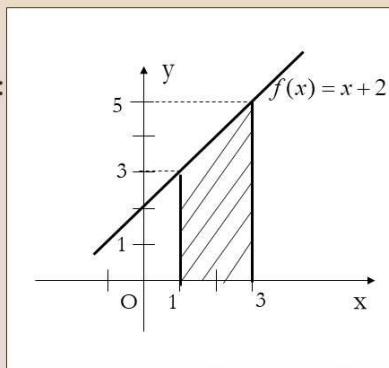
$$S = \frac{5+3}{2} \cdot 2 = 8$$

2) Найдите  $F(x)$  и вычислите  $S$  по формуле  $S=F(b)-F(a)$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x$$

$$F(b) = F(3) = 10,5$$

$$F(a) = F(1) = 2,5 \quad S = 10,5 - 2,5 = 8$$



© Комаров Р.А.

## Практическая работа № 36

### Вычисление площади криволинейной трапеции по готовым чертежам;

Цель : закрепление навыков умения вычислять площадь криволинейной трапеции при помощи первообразной; развитие логического мышления, памяти, внимания и самостоятельности

**Форма работы:** решение примеров

**Время выполнения:** 1ч

**Контроль выполнения:** проверка тетради

**Порядок выполнения работы:**

1. Повторить теоретический материал и изучить образцы решения примеров

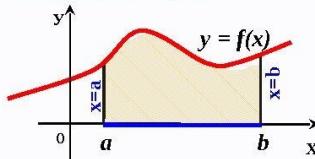
2. Выполнить задания практической работы.

## Методические указания

### Теоретический материал

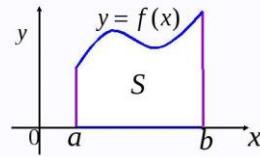
#### Криволинейная трапеция

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная осью ОХ, прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  ( $a < b$ ) и графиком непрерывной и не меняющей на отрезке  $[a; b]$  знака функции  $y = f(x)$ .



Отрезок  $[a; b]$  называют основанием этой криволинейной трапеции

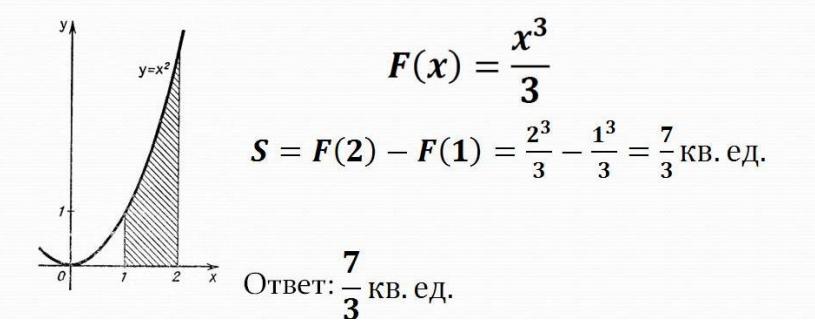
#### Площадь криволинейной трапеции.



$$S = F(b) - F(a)$$

где  $F(x)$  – любая первообразная функции  $f(x)$ .

**Пример.** Найти площадь криволинейной трапеции, изображённой на рисунке

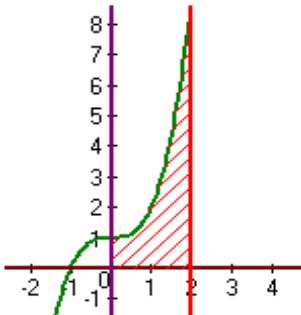
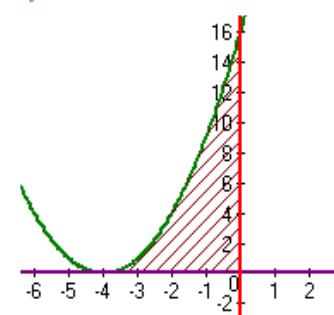
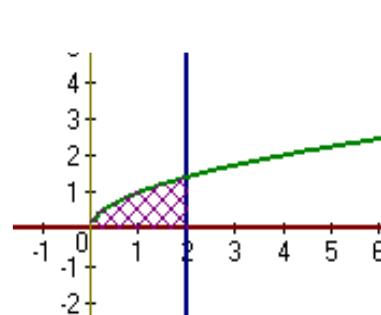
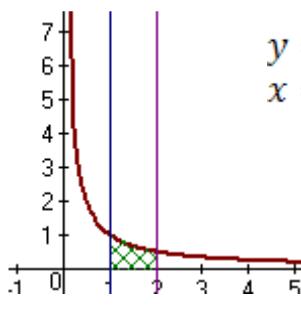
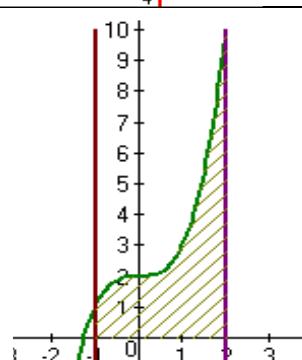
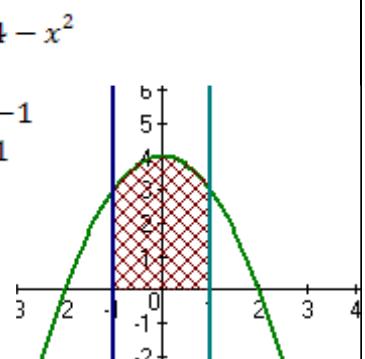


### Контрольные вопросы:

- Что называют криволинейной трапецией?
- Как вычисляют площадь криволинейной трапеции?

### Задания практической работы:

Найти площадь криволинейной трапеции, изображённой на рисунке. Выполнить 1 или 2 варианта самостоятельно на оценку 4-5

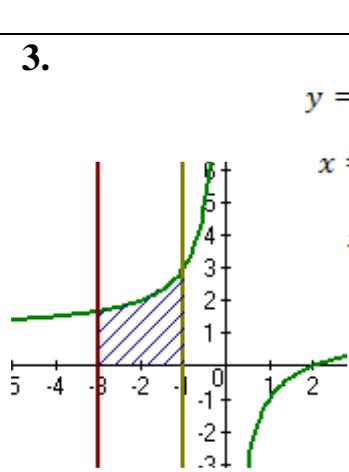
Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
<b>1.</b> $y = x^3 + 1$ $y = 0, x = 0, x = 2$ 	<b>1.</b> $y = x^2 + 8x + 16$ $y = 0, x = 0$ 	$y = \sqrt{x}$ $y = 0, x = 2$ 
<b>2.</b> $y = 0$ $x = 2$ 	$y = x^3 + 2$ $x = -1$ $x = 2$ 	$y = 4 - x^2$ $x = -1$ $x = 1$ 

3.

$$y = \frac{-2}{x} + 1$$

$$x = -1$$

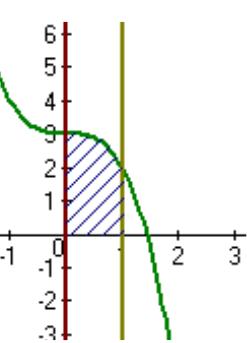
$$x = -3$$



$$y = -x^3$$

$$x = 0$$

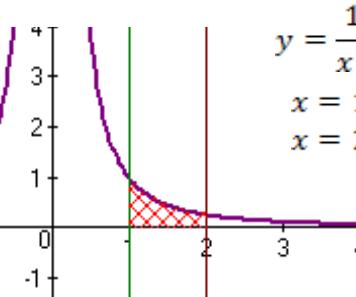
$$x = 1$$



$$y = \frac{1}{x^2}$$

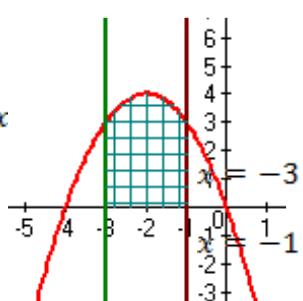
$$x = 1$$

$$x = 2$$



4

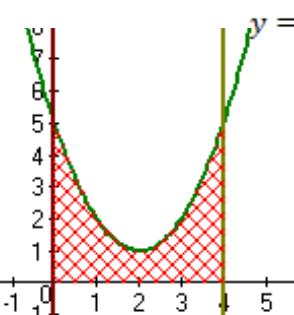
$$y = -x^2 - 4x$$



$$y = x^2 - 4x + 5$$

$$x = 0$$

$$x = 4$$



$$y = x^4$$

$$x = -1$$

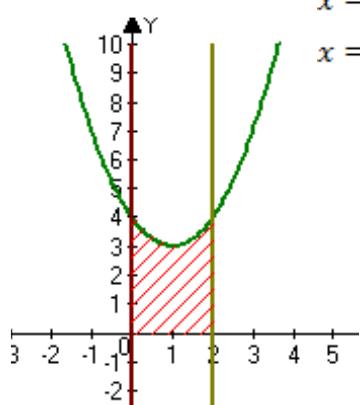
$$x = 1$$

5.

$$y = x^2 - 2x + 4$$

$$x = 0$$

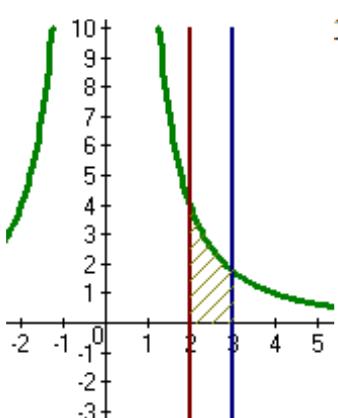
$$x = 2$$



$$y = \frac{16}{x^2}$$

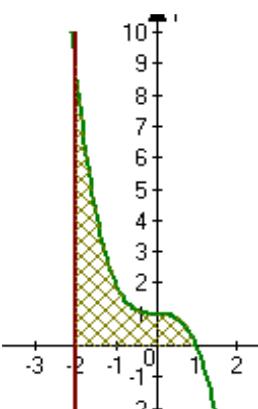
$$x = 2$$

$$x = 3$$



$$y = 1 - x^3$$

$$x = -2$$



Разбираю 3 вариант столбец (оБРАЗЕЦ)

Задача №3

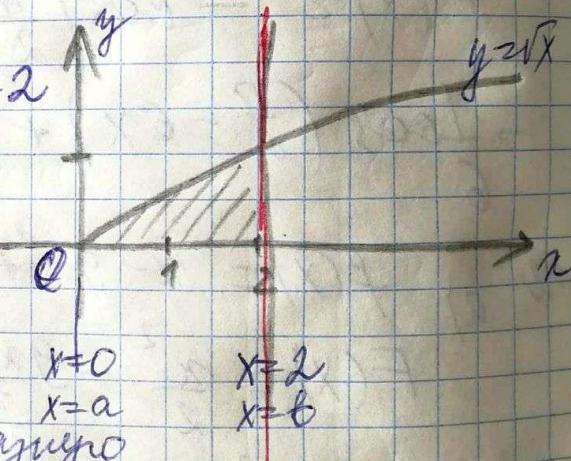
1)  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$

Решение:

$$S = F(b) - F(a)$$

Функция  $y = \sqrt{x}$ ,  
находящая ее первообразную

$$F(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}} + 1}{\frac{3}{2}}$$



Scanned with  
CamScanner

$$F(b) = F(2) = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

$$F(a) = F(0) = \frac{2}{3} \cdot 0 \cdot \sqrt{0} = 0$$

$$S_{\text{Querlyn}} = \frac{4}{3}\sqrt{2} - 0 = \frac{4}{3}\sqrt{2} (\text{geg}^2)$$

2)  $y = 4 - x^2$ ,  $x = -1$   
 $x = 1$

Rechnung:

$$S = F(b) - F(a)$$

$$F(x) = 4x - \frac{x^{2+1}}{2+1} = 4x - \frac{x^3}{3}$$

$$F(1) = 4 \cdot 1 - \frac{1^3}{3} = 4 - \frac{1}{3} = 3\frac{2}{3} \quad x=1$$

$$F(-1) = 4(-1) - \frac{(-1)^3}{3} = -4 + \frac{1}{3} = -3\frac{2}{3}$$

$$S_{\text{Querlyn}} = 3\frac{2}{3} - (-3\frac{2}{3}) = 6\frac{4}{3} = 7\frac{1}{3} (\text{geg}^2)$$

3)  $y = \frac{1}{x^2}$ ,  $g = 1$ ,  $x = 2$

Rechnung:

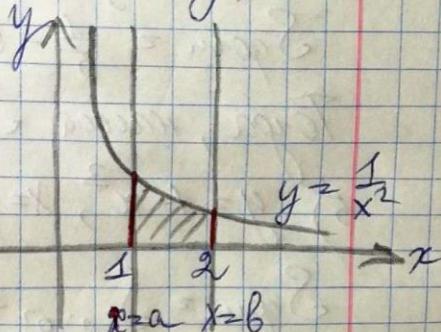
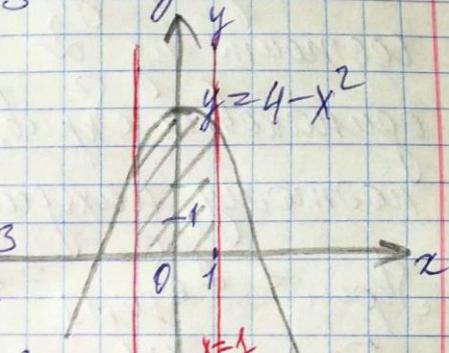
$$S = F(b) - F(a)$$

$$F(x) = F(x^{-2}) = \frac{-2+1}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1}$$

$$= -\frac{1}{x}$$

$$F(b) = F(2) = -\frac{1}{2}$$

$$F(a) = F(1) = -\frac{1}{1} = -1$$



Scanned with  
CamScanner

$$4) y = x^4, x = -t$$

$$x = t$$

Решение:

Использование

коэффициентов из 2

однократных скрив. производных,

позволяет находить  $S$  на промежутке  $[0, 1]$

$$S_{\text{полн}} = 2 \int_{[0, 1]} = 2(F(1) - F(0))$$

$$F(x) = \frac{x^{4+1}}{4+1} = \frac{x^5}{5}$$

$$F(1) = \frac{1^5}{5} = \frac{1}{5}$$

$$F(0) = \frac{0^5}{5} = 0$$

$$S_{\text{полн}} = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$$

$$\text{Тогда, решаем } S_{\text{внешней}} = 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5} (\text{если})$$

$$5) y = 1 - x^3, x = -2$$

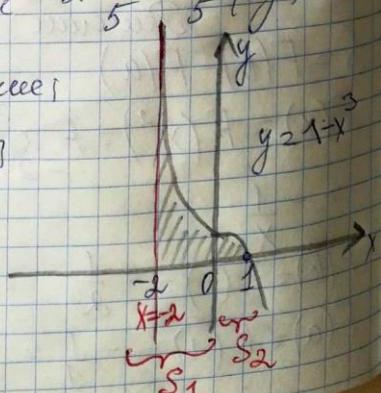
Решение:

$$S_{\text{полн}} = S_{[-2, 0]} + S_{[0, 1]}$$

$$F(x) = 1x - \frac{x^4}{4}$$

$$F(0) = 0$$

$$F(-2) = 1 \cdot (-2) - \frac{(-2)^4}{4} = -2 - 4 = -6$$



$$S_1 \text{ фигуры} = 0 - (-6) = 6 (\text{если})$$

$$F(1) = 1 - \frac{1^4}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$F(0) = 0$$

$$S_2 \text{ фигуры} = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4} (\text{если})$$

$$S_{\text{внешней}} = S_1 + S_2 = 6 + \frac{3}{4} = 6 \frac{3}{4} (\text{если})$$



# Практическая работа № 37

## Вычисление площади криволинейной трапеции

Цель : закрепление навыков умения вычислять площадь криволинейной трапеции при помощи первообразной ; развитие логического мышления, памяти, внимания и самостоятельности

**Форма работы:** решение примеров

**Время выполнения:** 2ч

**Контроль выполнения:** проверка тетради

**Порядок выполнения работы:**

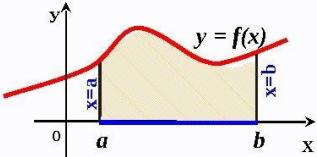
1. Повторить теоретический материал и изучить образцы решения примеров
2. Выполнить задания практической работы.

### Методические указания

#### Теоретический материал

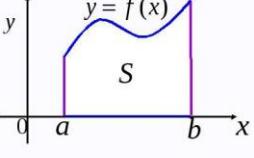
**Криволинейная трапеция**

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная осью ОХ, прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  ( $a < b$ ) и графиком непрерывной и не меняющей на отрезке  $[a; b]$  знака функции  $y = f(x)$ .



Отрезок  $[a; b]$  называют **основанием** этой криволинейной трапеции

**Площадь криволинейной трапеции.**


$$S = F(b) - F(a)$$

где  $F(x)$  – любая первообразная функции  $f(x)$ .

#### Пример:

Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной :  
графиком функции  $f(x) = x^2$  и прямыми  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ .

**Алгоритм решения:**

1. Начертим все линии. Заштрихуем образованную ими криволинейную трапецию. Сделаем запись:  
Фигура является криволинейной трапецией

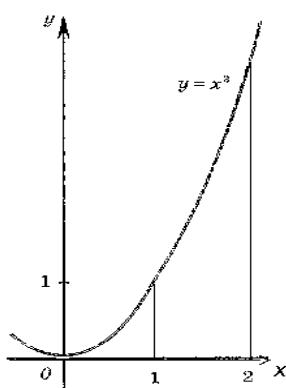
2. Найдём одну из первообразных функций  $f(x) = x^2$ :

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

3. По чертежу определим значения  $a$  и  $b$   
 $a = 1$      $b = 2$

4. Подставим полученные значения в формулу для нахождения площади криволинейной трапеции и вычислим

$$S \text{ к.м.} = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3} \quad (\text{кв. ед.})$$



#### Контрольные вопросы:

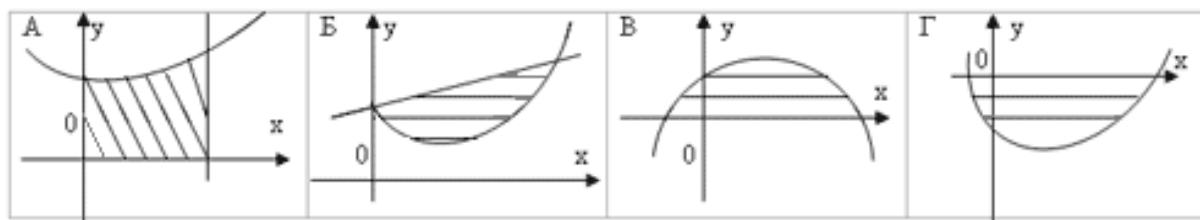
1. Что такое криволинейная трапеция?

2. Как найти площадь криволинейной трапеции при помощи первообразной?

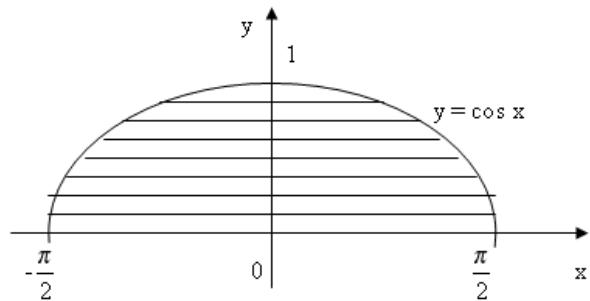
## Задания практической работы:

Письменно!

1. На каком рисунке изображена фигура, не являющаяся криволинейной трапецией?



2. Найдите площадь заштрихованной фигуры:



- А. 0;      Б. -2;      В. 1;      Г. 2.

3. Найдите площадь фигуры ограниченной осью  $Ox$  и параболой  $y = 9 - x^2$

- А. 18;      Б. 36;      В. 72;      Г. Нельзя вычислить.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $y = \sin x$ , прямыми  $x = 0$ ,  $x = 2\pi$  и осью абсцисс.

- А. 0;      Б. 2;      В. 4;      Г. Нельзя вычислить.