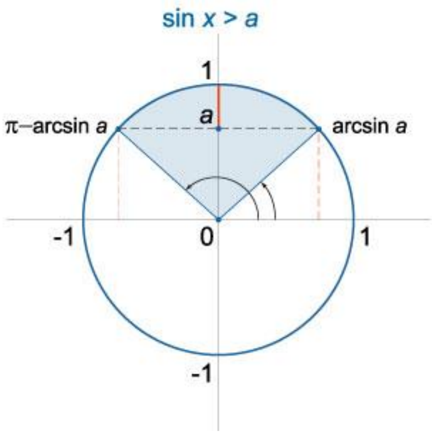
на *12мая*

Урок 52 Лекция «Решение тригонометрических неравенств».

Обучающая часть.

1. Неравенство, в котором неизвестная переменная находится под знаком тригонометрической функции, называется *тригонометрическим неравенством*.
2. К *простейшим тригонометрически неравенствам* относятся следующие 16 неравенств:
   sinx >a, sinx ≥a, sinx<a, sinx≤a,
   cosx>a, cosx≥a, cosx<a, cosx≤a,
   tanx>a, tanx≥a, tanx<a, tanx≤a,
   cotx>a, cotx≥a, cotx<a, cotx≤a.
   Здесь x является неизвестной переменной, a может быть любым действительным числом.

Неравенства вида sinx>a**,** sinx≥a**,** sinx<a**,** sinx≤a



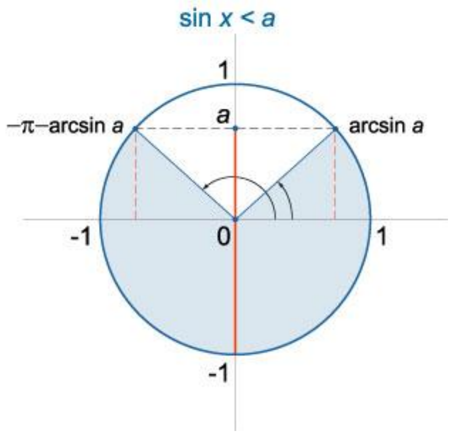
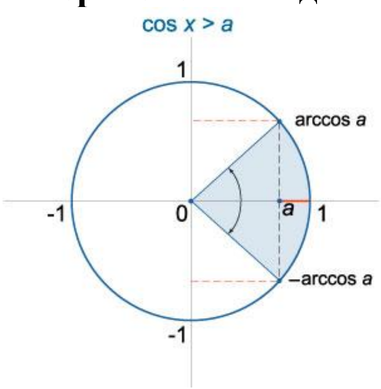


Рис.1 **Рис.2**

Неравенства вида cosx>a**,** cosx≥a**,** cosx<a**,** cosx≤a



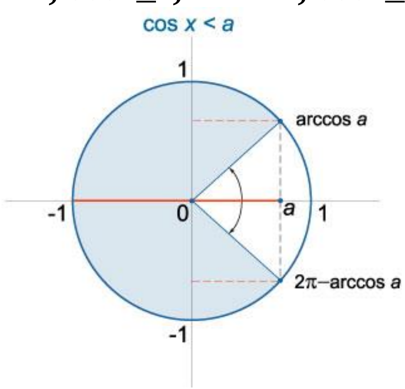
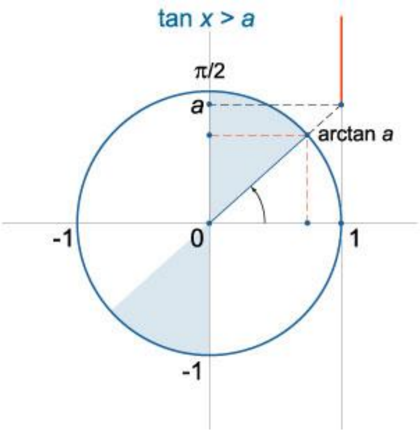


Рис.3 **Рис.4**

Неравенства вида tanx>a**,** tanx≥a**,** tanx<a**,** tanx≤a



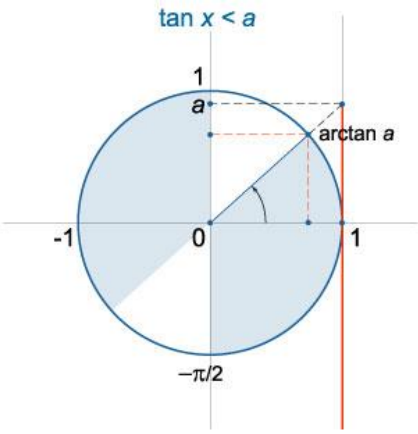
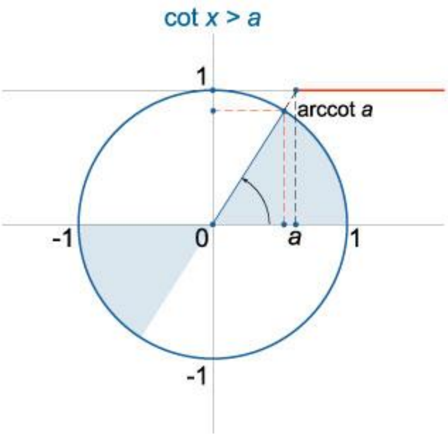


Рис.5 **Рис.6**

Неравенства вида cotx>a**,** cotx≥a**,** cotx<a**,** cotx≤a



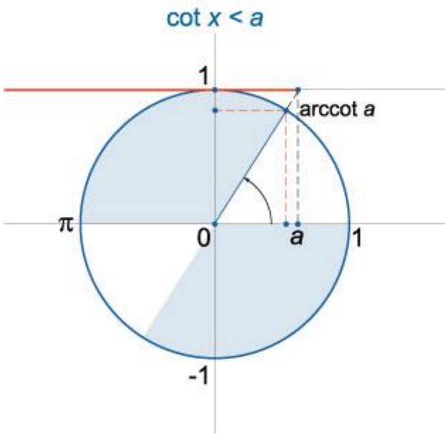


Рис.7 **Рис.8**

П р и м е р 1 . Решить неравенство: $\sin x > 0$.

Р е ш е н и е . В пределах одного оборота единичного радиуса это неравенство

справедливо при $0 < x < \pi$. Теперь необходимо добавить период

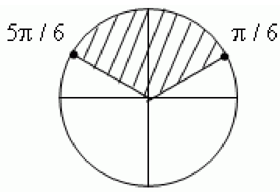
синуса $2\pi n$:

$$0 + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n, \text{ т.е. } 2\pi n < x < \pi + 2\pi n.$$

П р и м е р 2 . Решить неравенство: $\sin x > 0.5$.

Р е ш е н и е .

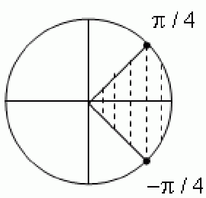
$$\pi / 6 + 2\pi n < x < 5\pi / 6 + 2\pi n .$$



П р и м е р 3 . Решить неравенство: $\cos x > \sqrt{2} / 2$.

Р е ш е н и е.

$$-\pi / 4 + 2\pi n < x < \pi / 4 + 2\pi n .$$

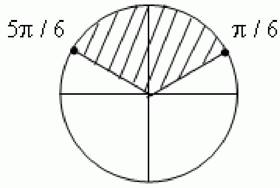


П р и м е р 4 . Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \sin x > 0.5, \\ \tan x < 1. \end{cases}$$

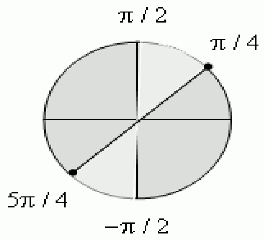
Р е ш е н и е . Первое неравенство $\sin x > 0.5$ имеет решение:

$$\pi/6 + 2\pi k < x < 5\pi/6 + 2\pi k.$$



Второе неравенство $\tan x < 1$ имеет решение:

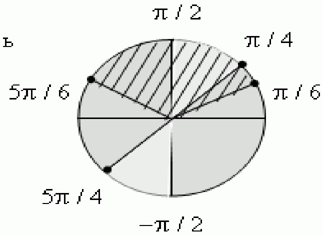
$$-\pi/2 + \pi m < x < \pi/4 + \pi m.$$



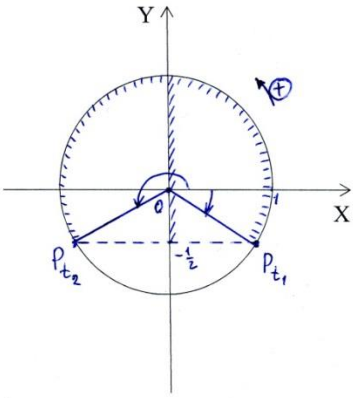
Совмещение этих двух решений даёт общее решение:

$$\begin{cases} \pi/6 + 2\pi n < x < \pi/4 + 2\pi n; \\ \pi/2 + 2\pi n < x < 5\pi/6 + 2\pi n. \end{cases}$$

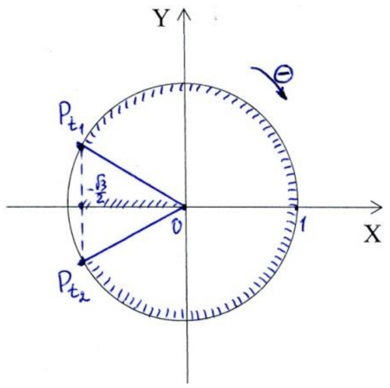
Область решения – это площадь с пересечением штриховок.



Урок 53-54«Решение тригонометрических неравенств».

1.	Лекция	-алгоритм решения простейших тригонометрических неравенств. (На доске – заготовки двух окружностей. Объяснение на примере). 1) $\sin x \geq -\frac{1}{2}$;  $t_1 < t_2$; $t_1 = \arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$; $t_2 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$.

2) $\cos x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$;



$t_1 > t_2$;

$t_1 = \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} =$

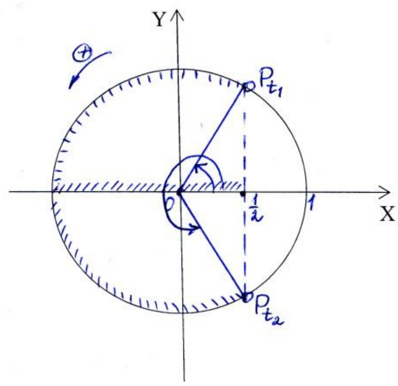
$= \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$;

$t_2 = -\frac{5\pi}{6}$;

$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$

- Каким образом отражается на ответе решение строгого неравенства?

3) $\cos x < \frac{1}{2}$;



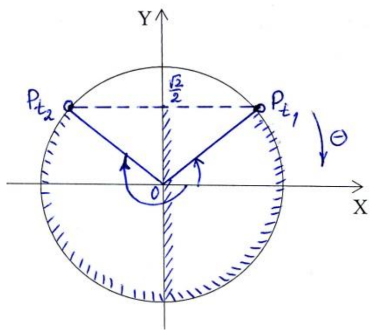
$t_1 < t_2$;

$t_1 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$;

$t_2 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$;

$\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

4) $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$;



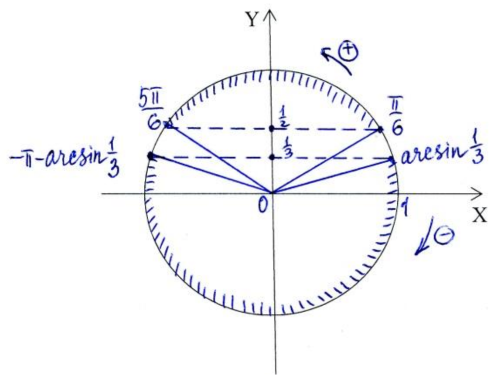
$t_1 > t_2$;

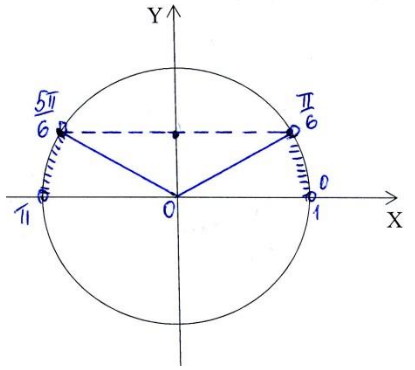
$t_1 = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$;

$t_2 = -\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$;

$-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$

- Поменяйтесь вариантами, возьмите ручку другого цвета, проверьте работу товарища.

2	Новый материал.	- Переходим к более сложным тригонометрическим неравенствам, решение которых будет сводиться к решению простейших тригонометрических неравенств. Рассмотрим примеры. (Решение неравенств на доске под руководством учителя). №1. $\cos^2 2x - 2\cos 2x \geq 0$. (Вспомним прием решения тригонометрических уравнений вынесением общего множителя за скобку). $\cos 2x(\cos 2x - 2) \geq 0$. Замена: $\cos 2x = t$, $\lvert t \rvert \leq 1$; $t(t-2) \geq 0$; $\left[\begin{array}{l} t \leq 0; \\ t \geq 2. \end{array}\right.$ Второе неравенство не удовлетворяет условию $\lvert t \rvert \leq 1$. $\cos 2x \leq 0$. (Решить неравенство самостоятельно. Проверить ответ). Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{3\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. №2. $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 \geq 0$. (Вспомним прием решения тригонометрических уравнений заменой переменной. У доски решает ученик с комментариями). Замена $\sin x = t$, $\lvert t \rvert \leq 1$. $6t^2 - 5t + 1 \geq 0$, $6(t - \frac{1}{2})(t - \frac{1}{3})$, $\left[\begin{array}{l} t \leq \frac{1}{3}, \\ t \geq \frac{1}{2}. \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sin x \leq \frac{1}{3}, \\ \sin x \geq \frac{1}{2}. \end{array}\right.$  Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $-\pi\text{-}\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k \leq x \leq \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k$, $n, k \in Z$. №3. $\sin x + \cos 2x > 1$. (Обсуждаем варианты решения. Вспоминаем фомулу косинуса двойного угла. Класс решает самостоятельно, один ученик – на индивидуальной доске с последующей проверкой). $\sin x + \cos 2x - 1 > 0$, $\sin x - 2\sin^2 x > 0$, $\sin x(1 - 2\sin x) > 0$, $\left\{\begin{array}{l} \sin x < \frac{1}{2}, \\ \sin x > 0. \end{array}\right.$

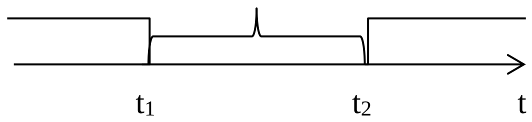


Ответ:

$2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$,

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

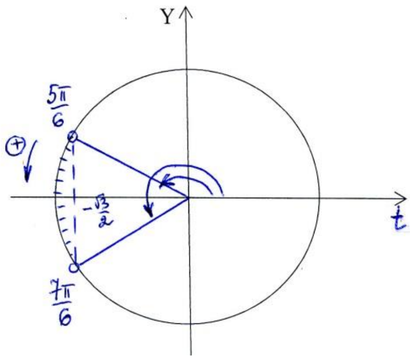
Проанализировать ситуации, когда ответ к решению квадратного неравенства записываем в виде совокупности двух неравенств, а когда – в виде системы. Полезна следующая схема:



№4. $\cos\frac{\pi}{8}\cos x - \sin\frac{\pi}{8}\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Обсуждение. К доске вызываются по одному ученику на каждый шаг решения, комментируются этапы. Учитель проверяет запись у учеников, работающих на месте).

$\cos(x + \frac{\pi}{8}) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$,

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x + \frac{\pi}{8} < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$,

$\frac{17\pi}{24} + 2\pi n < x < \frac{25\pi}{24} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ:

$\frac{17\pi}{24} + 2\pi n < x < \frac{25\pi}{24} + 2\pi n$, $n \in Z$.

№5. Определите все *a*, при каждом из которых неравенство $4\sin x + 3\cos x \le a$ имеет хотя бы одно решение.

(Вспомнить алгоритм решения тригонометрического уравнения с нормирующим множителем. Решение записано на кодоскопной ленте. Открываю его поэтапно по мере рассуждений. Дифференцированная работа).

$4\sin x + 3\cos x \le a$, $M = \sqrt{4^2 + 3^3} = 5$. Разделим обе части неравенства на 5: $\frac{4}{5}\sin x + \frac{3}{5}\cos x \le \frac{a}{5}$. Так как $(\frac{4}{5})^2 + (\frac{3}{5})^2 = 1$, то существует такой угол α, что $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, а $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Перепишем

		предыдущее неравенство в виде: sin(x + α) ≤ $\frac{a}{5}$. Последнее неравенство, а, значит, и исходное неравенство имеет хотя бы одно решение при каждом *a* таком, что $\frac{a}{5}$ ≥ -1, то есть при каждом *a* ≥ -5. Ответ: *a* ≥ -5.
7.	Домашнее задание.	(Раздаю карточки с записью домашнего задания. Комментирую решение каждого неравенства). 1. $\cos x > \sin^2 x$; 2. $4\sin 2x\cos 2x < -\sqrt{2}$; 3. $\cos^2\frac{x}{3} \le \sin^2\frac{x}{3} - 0{,}5$; 4. $\sin x + \sqrt{3}\cos x > 1$. Повторить тригонометрические формулы сложения, подготовиться к самостоятельной работе.
8.	Подведение итогов, рефлексия.	- Назовите приемы решения тригонометрических неравенств. - Каким образом знание алгоритма решения простейших тригонометрических неравенств используется при решении более сложных неравенств? - Какие неравенства вызвали наибольшее затруднение? (Оцениваю работу учащихся на уроке).

Практическая работа № 25

Решение тригонометрических уравнений (понижение степени).

Цель : закрепление навыков умения решать тригонометрические уравнение понижением степени переменной; развитие логического мышления, памяти, внимания и самостоятельности

Форма работы: решение примеров
Время выполнения: 1ч
Контроль выполнения: проверка тетради
Порядок выполнения работы:
1. Повторить теоретический материал и изучить образцы решения уравнений
2. Выполнить задания практической работы.

Методические указания

Теоретический материал

Общие формулы решения тригонометрических уравнений

$\sin x = a, \ \ \|a\| \le 1;$ x $\quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \ \ n \epsilon$	$II. \quad \cos x = a, \ \ \|a\| \le 1$ $x = \pm \arccos a + 2\pi n, \ \ n \epsilon z$

$tg\,x = a,\quad a$ – *любое число* $x = arctg\,x + \pi n,\ n\epsilon z$	$ctg\,x = a,\quad a$ – *любое число* $x = arcctgx + \pi n, n\epsilon z$

Частные решения тригонометрических уравнений

$\sin x=0$ $x=\pi n, n\epsilon z$	$\sin x=1$ $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\epsilon z$	$\sin x=-1$ $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\epsilon z$
$\cos x=0$ $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\epsilon z$	$\cos x=1$ $x=2\pi n, n\epsilon z$	$\cos x=-1$ $x=\pi+2\pi n,\ n\epsilon z$

Методы решения тригонометрических уравнений

Метод замены переменной

Решение однородных тригонометрических уравнений

метод понижения степени

Метод разложения на множители

Метод понижения степени

Для решения уравнений данным методом применяются формулы понижения степени:

$$2\sin^2 x=1-\cos 2x$$

$$2\cos^2 x=1+\cos 2x$$

Пример:

$\sin^2 x + \cos^2 2x + \sin^2 3x = 1{,}5$

Используя формулы понижения степени: $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$,

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ получаем равносильное уравнение

$\dfrac{1-\cos 2x}{2} + \dfrac{1+\cos 4x}{2} + \dfrac{1-\cos 6x}{2} = \dfrac{3}{2}$,

$\cos 2x + \cos 6x - \cos 4x = 0$, $(\cos 2x + \cos 6x) - \cos 4x = 0$,

используя формулы суммы синусов

$2\cos 4x \cdot \cos 2x - \cos 4x = 0$, $\cos 4x(2\cos 2x - 1) = 0$,

$\cos 4x = 0$ или $2\cos 2x - 1 = 0$

$4x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z$,

$x_1 = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{4} n, n \in Z$, $2x = \pm \arccos \dfrac{1}{2} + 2\pi n, n \in Z$, $x_2 = \pm \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

Ответ: $x_1 = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{4} n, n \in Z, x_2 = \pm \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

Контрольные вопросы:

1. Какие существуют методы решения тригонометрических уравнений?
2. В чем заключается метод понижения степени переменной?

Задания практической работы:

Вариант 1	Вариант 2
1. $2\sin^2 x + \cos 4x = 0$.	$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$
2. $\sin^2 6x + 8\sin^2 3x = 0$.	$\sin 3x + \sin 5x = 2(\cos^2 2x - \sin^2 3x)$.
3. $4\sin^2 x + \sin^2 2x = 3$.	$3\cos^2 x - 2\sin^2 x + \sin^2 x = 0$
4. $\sin^2 5x = \cos^2 2x - 2\sin^2 2x - 1$	$4\sin^2 x - 2\cos^2 x - \sin x = 0$

Практическую работу выполняем по вариантам и фотографии высылаем на электронную почту: alevtina_sokolov@mail.ru

<u>на 14 мая</u>

Практическая работа № 26

Решение тригонометрических неравенств

Цель : закрепление навыков решения простейших тригонометрических неравенств; развитие логического мышления, памяти, внимания и самостоятельности

Форма работы: решение примеров
Время выполнения: 2ч
Контроль выполнения: проверка тетради
Порядок выполнения работы:
1. Повторить теоретический материал и изучить образец решения неравенств
2. Выполнить задания практической работы.

Методические указания

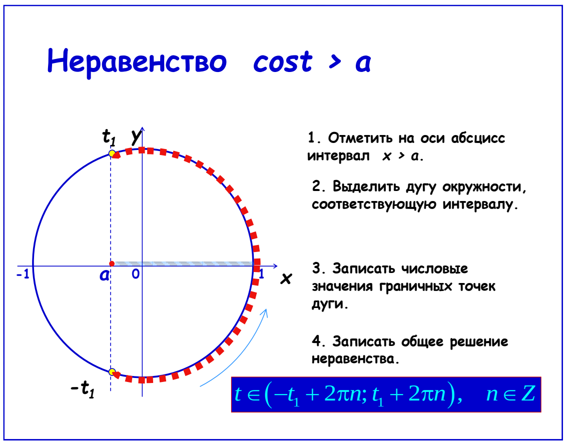
Теоретический материал

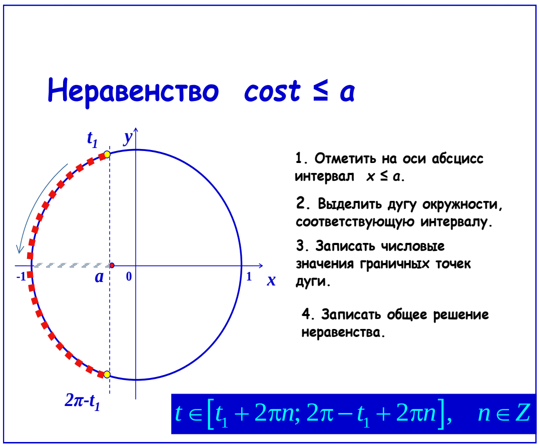
К простейшим тригонометрическим неравенствам относятся неравенства вида:

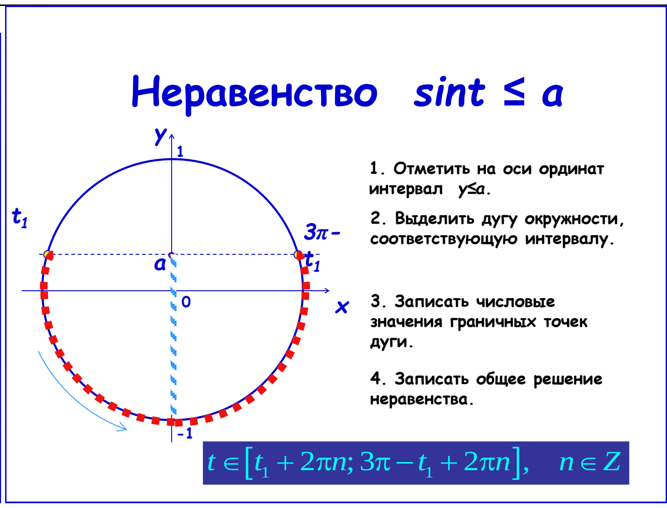
$\cos t \geq a\,(\cos t \leq a)$ $\sin t \geq a\,(\sin t \leq a)$ $tg\,t \geq a\,(tg\,t \leq a)$ $ctg\,t \geq a\,(ctg\,t \leq a)$

<u>Алгоритм решения тригонометрических неравенств с помощью единичной окружности:</u>

1. На оси, соответствующей заданной тригонометрической функции, отметить данное числовое значение этой функции.
2. Провести через отмеченную точку прямую, пересекающую единичную окружность.
3. Выделить точки пересечения прямой и окружности с учетом строгого или нестрогого знака неравенства.
4. Выделить дугу окружности, на которой расположены решения неравенства.
5. Определить значения углов в начальной и конечной точках дуги окружности.
6. Записать решение неравенства с учетом периодичности заданной тригонометрической функции.

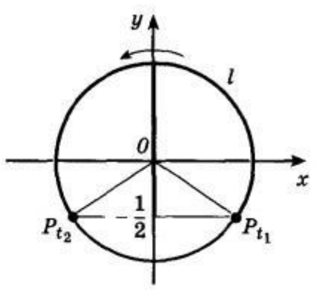






Пример . Решить неравенство sint > -1/2.

Рисуем единичную окружность. Так как sin(t) по определению - это координата y, отмечаем на оси Оу точку y = -1/2. Проводим через неё прямую, параллельную оси Ох. В местах пересечения прямой с графиком единичной окружности отмечаем точки Pt1 и Pt2. Соединяем двум отрезками начало координат с точками Pt1 и Pt2.



Решением данного неравенства будут все точки единичной окружности расположенные выше данных точек. Другими словами решением будет являться дуга l.. Теперь необходимо указать условия, при которых произвольная точка будет принадлежать дуге l. Pt1 лежит в правой полуокружности, её ордината равна -1/2, тогда t1=arcsin(-1/2) = - п/6. Для описания точки Pt1 можно записать следующую формулу:

t2 = п – arcsin(-1/2) = 7п/6. Мы сохраняем знаки неравенств. А так как функция синус функция периодичная, значит решения будут повторяться через каждые 2п. Это условие добавляем к полученному неравенству для t и записываем ответ.

Ответ: -п/6+2пn < t < 7п/6 + 2пn, при любом целом n.

Контрольные вопросы:

1. Какие неравенства относятся к тригонометрическими?
2. Сформулируйте алгоритм решения тригонометрических неравенств.

Варианты практической работы:

Вариант 1	Вариант 2
1) sinx≥1/2 2)cosx<-√2/2 3) 2cosx-1>0 4) 2cos(2x+п/3)≤1 5) cosx/3≥√3/2	1) sinx ≤-√2/2 2)cosx≥√3/2 3) 2cosx-√3≤0 4) 2cos(4x-п/6)>√3 5) sinx/2<-√3/2

Практическую работу выполняем по вариантам и фотографии высылаем на электронную почту: alevtina_sokolov@mail.ru

Практическая работа 27

1 Написать тему решение тригонометрических систем уравнений в тетрадь.

Решение тригонометрических систем уравнений

Повторение сведений о методах решения систем алгебраических уравнений
1. Решите систему уравнений (методом добавления).

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ x - y = 2; \end{cases}$$

Ответ: (5; 3).

2. Решите систему уравнений.

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$$

Ответ: (1; 3), (3; 1).

Восприятия и осознания материала о решение систем тригонометрических уравнений

Основные методы решения систем тригонометрических уравнений почти такие, как и

методы решения алгебраических систем.
Рассмотрим примеры.
Пример 1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x - \cos y = 1, & (1) \\ \sin x + \cos y = 0. & (2) \end{cases}$$

Решение
Прибавив и вычтя (1) и (2) уравнение, получаем

$$\begin{cases} 2\sin x = 1, \\ 2\cos y = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2}, \\ \cos y = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z, \\ y = \pm \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z. \end{cases}$$

Ответ: x = (-1) $\frac{\pi}{6}$ + πn, n $\in$ Z; y = ± $\frac{2\pi}{3}$ + 2nk, k $\in$ Z.
Пример 2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = \pi, \\ cosx - \cos y = 1; \end{cases}$$

Решение
Из первого уравнения находим y = n - x.
Тогда cos x – cos (n - x) = 1, cos x + cos x = 1,
2 cos x = 1, cos x = $\frac{1}{2}$, x = ± $\frac{\pi}{3}$ +2 πn, n $\in$ Z.
Затем находим: y=π - $\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$ = ± $\frac{\pi}{3}$ + (1 - 2n)π, п $\in$ Z.
Ответ: x = ± $\frac{\pi}{3}$ + 2πп, y = ± $\frac{\pi}{3}$ + (1 - 2п)π, где n $\in$ Z.

Пример 3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ \sin(x-y) = 0. \end{cases}$$

Решение

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ \sin(x-y) = 0. \end{cases} \begin{cases} x + y = \pi k, & k \in Z, \\ x - y = \pi n, & n \in Z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \pi(k+n), & n \in Z, k \in Z, \\ 2y = \pi(k-n), & n \in Z, k \in Z. \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2}(k+n), & n, k \in Z, \\ y = \dfrac{\pi}{2}(k-n), & n, k \in Z. \end{cases}$$

Ответ: x = $\frac{\pi}{2}$ (k + n), y = $\frac{\pi}{2}$ (k - n), где n, k $\in$ Z.

а) $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2}, \\ \sin^2 x - \sin^2 y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ x + y = \pi. \end{cases}$

Ответ: а) x= $\dfrac{\pi}{2}$ - πn, y = πn, n $\in$ Z;

б) x= (-1)k $\dfrac{\pi}{6}$ + nk, в = (-1)k+1 $\dfrac{\pi}{6}$ + n(1 - k), k $\in$ Z.

Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2}, \\ \sin x + \cos y = \sqrt{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \cos x + \sin y = 0{,}5, \\ \cos x - \sin y = 0{,}5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin x - \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \cos x \cos y = 0{,}75, \\ \sin x \sin y = 0{,}25; \end{cases}$

Ответы: а) x1 = $\dfrac{\pi}{4}$ + 2πk, y1 = $\dfrac{\pi}{4}$ - 2πk, x2 = $\dfrac{3\pi}{4}$ + 2πk, y2 = - $\dfrac{\pi}{4}$ - 2πk, k $\in$ Z.

б) x = ± $\dfrac{\pi}{3}$ + 2πk, y = πn где n $\in$ Z, k $\in$ Z.

в) x = $\dfrac{\pi}{2}$ + 2πk, y = $\dfrac{\pi}{2}$ + πn, где n $\in$ Z, k $\in$ Z.

г) x = - $\dfrac{\pi}{6}$ + π(n + k), n, k $\in$ Z, y = - $\dfrac{\pi}{6}$ + n(k - n), n, k $\in$ Z.

На 15 мая

Контрольную работу выполняем по вариантам и фотографии высылаем на электронную почту: alevtina_sokolov@mail.ru

6-7 правильно решенных заданий-оценка 3

Контрольная работа 2 «тригонометрия»

Вариант 1

№1 Выразить в радианах угол α = 20°

1) π/5 2) π/7 3) π/9 4) π/10

№2 При каких значениях угла (в градусной мере) не существует тангенс?

1) 0° 2) 180° 3) 90° 4)120°

№3 Выразить в градусах угол α = 4π/45

1) 16º 2) 15º 3) 20º 4) 35º

№4 Какой четверти числовой окружности принадлежит точка t = 27п/4

1) первой 2) второй 3) третьей 4) четвёртой

№5 Косинусом называется … точки единичной окружности.

1)абсцисса 2)ордината 3)координата 4)затрудняюсь ответить

№6 Упростить выражение: 9cos2α – 16 + 9sin2α

1) 2 2) -25 3)-15 4) -7

№7 Упростить выражение: 1,5cos2α – 6,5 + 1,5sin2α

1) 1 2) -5 3)3 4) -3

№8 Упростить выражение: cos5α · cos7α – cosα + sin5α · sin7α

1) cos12α – cosα 2) sin12α – cosα 3) sin2α – cosα 4) cos2α – cosα

№9 Упростить выражение $\frac{\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha} - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)$

1) sin2α 2) cos2α 3) 3cos2α 4) cos3α

№10 Упростить выражение: 13cos2α – 15 + 13sin2α

1) 2 2) -2 3) 0 4) 28

Вариант 2

1.Найдите значение выражения: 2cos30°+2cos60°- tg60°.

1. 0;
2. 2;
3. 1

2. Упростить: cos2α-cos4α+sin4α.

1. 1;
2. 0;
3. sin2α

3.Найдите cosα и tgα, если sinα=-0,6; π<α<3π/2.

1. cosα=-0,8; tgα=0,75;
2. cosα=0,8; tgα=0,65;
3. cosα=-0,8; tgα=0,5;

4.Преобразовать в произведение: cos47°+cos73°.

1. cos46°;
2. sin46°;
3. sin13°

5.Вычислить: cos 85°+ cos 35° – cos 25°.

1. 0;
2. 1;
3. cos 40°

6.Представить в виде произведения: sin 15° + cos 65°.

1. 2sin 20°cos 5 ;
2. sin 25°cos 40°;
3. 2sin 25 cos 40°

7.Упростить: sin75°sin15°.

1. 0,25;
2. 0,5;
3. 1

8.Вычислить: sin 15°cos 7° – cos 11°cos 79°.

1. sin 8°;
2. 0,5sin 8°;
3. cos 22°

9. Вычислить: sin(2arccos 0,8).

1. 0,8;
2. 0,6;
3. 0,96

10.Решите уравнение: 2cos x=0.

1. $\pi+2\pi n,\ n\in Z$;
2. $\pi/2+\pi n,\ n\in Z$;
3. $\pi+\pi n,\ n\in Z$

Л Е К Ц И Я

Тема: Последовательности. Способы задания и свойства числовых последовательностей. Понятие о пределе последовательности.

Цели: создание благоприятных условий для изучения понятия числовой последовательности; ввести определение предела последовательности и предела функции; познакомить с правилами вычисления пределов функции в точке и на бесконечности.

Т Е О Р Е Т И Ч Е С К И Й   М А Т Е Р И А Л

Определение№1: *множество чисел, каждое из которых снабжено своим номером, называется числовой последовательностью.*

Элементы этого числового множества называются членами последовательности и обозначают: первый член - a_1, второй - a_2, n- й член - a_n и т.д. Вся последовательность обозначается : $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ или (a_n).

Числовая последовательность представляет собой не что иное, как множество нумерованных чисел, упорядоченных наподобие натурального ряда, т.е. располагаемое в порядке возрастания номеров. Последовательность может содержать как конечное, так и бесконечное число членов.

Последовательность, состоящая из конечного числа членов, называется конечной, а последовательность, состоящая из бесконечного числа членов, - бесконечной последовательностью.

Иногда бесконечную числовую последовательность вводят, используя понятие функции:

Определение №2: *Функцию $y = f(x)$, $x\in N$ называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают: $y = f(n)$, или $y_1, y_2, y_3..., y_n$ или $y(n)$.*

Последовательности можно задавать различными способами, например, ***словесно***, когда правило задавания последовательности описано словами, без указания формулы. Так, словесно задается последовательность простых чисел:

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,...

Особенно важны ***аналитический и рекуррентный*** способы задания последовательности.

Говорят, что последовательность задана ***аналитически***, если указана формула ее n-го члена.

Приведем три примера.

1) $y_n = n^2$. Это аналитическое задание последовательности
   $1,4,9,16,\ldots, n^2, \ldots$

Указав конкретное значение n, нетрудно найти член последовательности с соответствующим номером. Если. Например, n= 9, то $y_9 = 9^2 = 81$, если

2) y_n = C. Здесь речь идет о последовательности C, C, C, …., C, …. . Такую последовательность называют **постоянной** (или стационарной).
3) $y_n = 2^n$. Это аналитическое задание последовательности $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$

Рекуррентный способ задания последовательности состоит в том, что указывают правило, позволяющее вычислить *n*- й член последовательности, если известны ее предыдущие члены. Например, **арифметическая прогрессия – это числовая последовательность (a_n), заданная рекуррентно соотношениями:**

$$a_1 = a,\quad a_{n+1} = a_n + d$$

(*a* и *d – заданные числа, d – разность арифметической прогрессии*)

Геометрическая прогрессия – это числовая последовательность (b_n)? Заданная рекуррентно соотношениями:

$$b_{1,} = b,\ b_{n+1} = b_n \cdot q$$

(*b* и *q – заданные числа, b≠0, q ≠ 0; q знаменатель геометрической прогресси прогрессии*).

Пример: Выписать первые пять членов последовательности, заданной рекуррентно:$y_1 = 1$; $y_2 = 1$; $y_n = y_{n-2} + y_{n-1}$

Решение. n –й член последовательности равен сумме двух предшествующих ему членов. Значит, последовательно получаем:

$y_1 = 1$; $y_2 = 1$; $y_3 = 1+1 = 2$; $y_4 = 1+ 2 = 3$; $y_5 = 2+3 = 5$; и т.д.

Ограниченные последовательности.

- Последовательность (x_n) называется ограниченной, если существуют такие два числа m и M, что для всех $n \in N$ выполняется неравенство $m \le x_n \le M$.
- Последовательность (x_n) называется ограниченной сверху, если существует такое число M, что для всех $n \in N$ выполняется неравенство $x_n \le M$.
- Последовательность (x_n) называется ограниченной снизу, если существует такое число m, что для всех $n \in N$ выполняется неравенство $m \le x_n$

Например: последовательность (x_n), заданная формулой общего члена $x_n = n$, ограничена снизу (например, число 0) и не ограничена сверху.

Монотонные последовательности.

Последовательность (x_n) называется возрастающей, если каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего, т.е. если для любого натурального n выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$.

Последовательность (x_n) называется убывающей, если каждый ее член, начиная со второго, меньше предыдущего, т.е. если для любого натурального n выполняется неравенство $x_{n+1} < x_n$.

Последовательность (x_n) называется невозрастающей, если каждый ее член, начиная со второго, не более предыдущего, т.е. если для любого натурального n выполняется неравенство $x_{n+1} \le x_n$.

Последовательность (x_n) называется неубывающей, если каждый ее член, начиная со второго, не меньше предыдущего, т.е. если для любого натурального n выполняется неравенство $x_{n+1} \ge x_n$.

Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие последовательности образуют класс *монотонных* последовательностей.

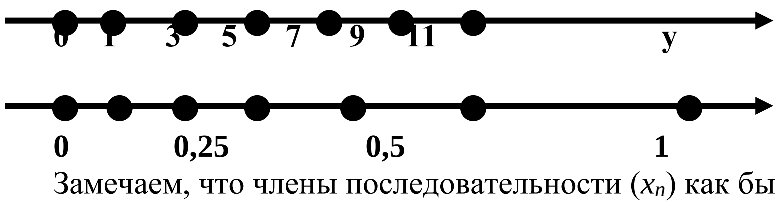
Предел числовой последовательности.

Рассмотрим для числовые последовательности – (y_n) и (x_n).

(y_n): 1, 3,5, 7, 9, … 2n – 1, …;

(x_n): 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots. \frac{1}{n}, \ldots.$

Изобразим члены этих последовательностей точками на координатной прямой.



Замечаем, что члены последовательности (x_n) как бы «сгущаются» около точки 0 – говорят последовательность ***сходятся*** , а у последовательности (y_n) такой точки сгущения нет – и говорят, что последовательность ***расходится.***

Математики не используют термин точка сгущения, а они говорят *предел последовательности.*

Определение: *Число b называется пределом последовательности (y_n), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержится все члены последовательности, начиная с некоторого номера.*

Пишут так: $y_n \to b$ *или* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ читают так: предел последовательности y_n *при стремлении n к бесконечности равен b.*

На практике используется еще одно истолкование равенства $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, связанное с приближенными вычислениями: если последовательность y_n = f($_n$) сходится к числу b, то выполняется приближенное равенство f($_n$)≈b, причем это приближенное равенство тем точнее, чем больше n.

Необходимое условие сходимости произвольной числовой последовательности:

Для того чтобы последовательность сходилась, необходимо, чтобы она была ограниченной.

Достаточное условие сходимости последовательности.

Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится. (теорема К.Вейерштрасса)

Свойства сходящихся последовательностей

1. Если последовательность сходится, то только к одному пределу.
2. Если последовательность сходится, то она ограничена.
3. Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится.

Если $|q| > 1$***, то последовательность*** $y_n = q^n$ ***расходится.***

Теоремы о пределах последовательностей.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
2. Если $|q| < 1 mo \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$
3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$, то
4. Для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо соотношение: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k}{n^m} = 0$
5. Предел суммы равен сумме пределов: $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = b + c$
6. Предел произведения равен произведению пределов: $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = bc$;
7. Предел частного равен частному пределов: $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n : y_n) = b : c$, где c≠0.
8. Постоянный множитель можно выносить за знак предела: $\lim\limits_{n\to\infty} (kx_n) = kb$

Нахождение пределов последовательности:

Найти предел последовательности:

а) $x_n = \frac{1}{n^2}$ б) $x_n = \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + 3$ в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+4}$

Решение: а) применив правило «предел произведения», получим:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$$

б) применим правило «предел суммы» и получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}+3\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}+\lim_{n\to\infty}3=0-0+3=3$$

в) в подобных случаях применяют искусственный прием: делят числитель и знаменатель дроби почленно на наивысшую из имеющихся степень переменной n. В данном примере разделим числитель и знаменатель дроби почленно на n^2 . Имеем:

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{4}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}}=\frac{2+0}{1+0}=\frac{2}{1}=2$ (здесь мы применили правило «предел