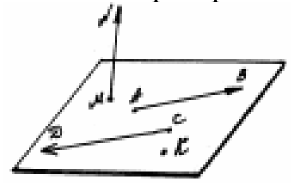
Урок №205-206
Понятие вектора в пространстве. Модуль вектора

Вектором называется отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой - концом.

Любая точка пространства рассматривается как **нулевой вектор**.



$\overline{KK}$ - нулевой вектор, обозначается.

Длина вектора формула - это неотрицательное число, равное длине отрезка AB.

$|\boxed{a}| = \sqrt{\boxed{a_x^2 + a_y^2 + a_z^{2,}}}$ $\boxed{a} = \{a_x ; a_y ; a_z\}$

Так как обозначение длины вектора в точности совпадает со знаком модуля, то можно услышать, что длину вектора называют модулем вектора. Все же рекомендуем $\overrightarrow{AB}$ использовать термин "длина вектора". Длина нулевого вектора равна нулю.

Пример. Найти длину вектора $\boxed{a} = \{2; 4; 4\}$.

Решение: $|\boxed{a}| = \sqrt{\boxed{2^2 + 4^2 + 4^2}} = \sqrt{\boxed{4 + 16 + 16}} = \sqrt{\boxed{36}} = 6$.

Задача для самостоятельного решения. Найти длину вектора $\boxed{a} = \{-1; 0; -3\}$.

Решение: $|\boxed{a}| = \sqrt{\boxed{(-1)^2 + 0^2 + (-3)^2}} = \sqrt{\boxed{1 + 0 + 9}} = \sqrt{\boxed{10}}$.

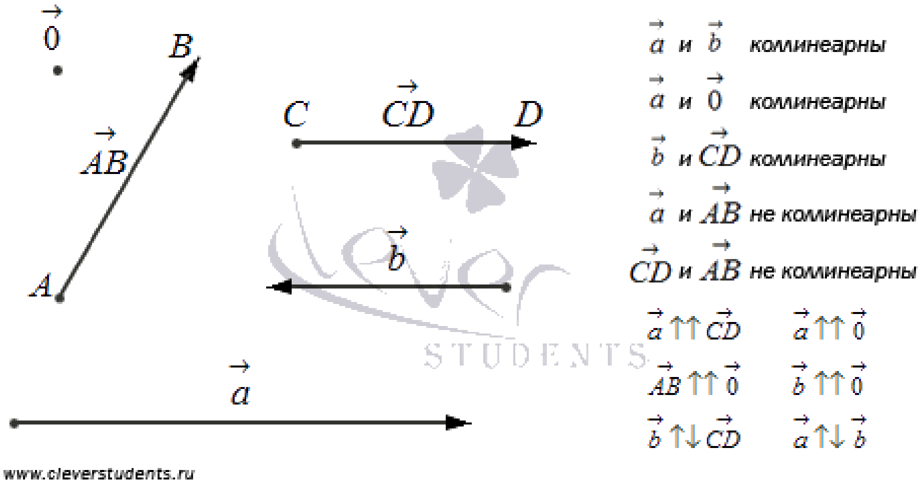
Два вектора называют **коллинеарными,** если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Два вектора называют **неколлинеарными**, если они не лежат на одной прямой или параллельных прямых.

Нулевой вектор коллинеарен любому другому вектору.

Два коллинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют **сонаправленными**, если их направления совпадают и обозначают $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

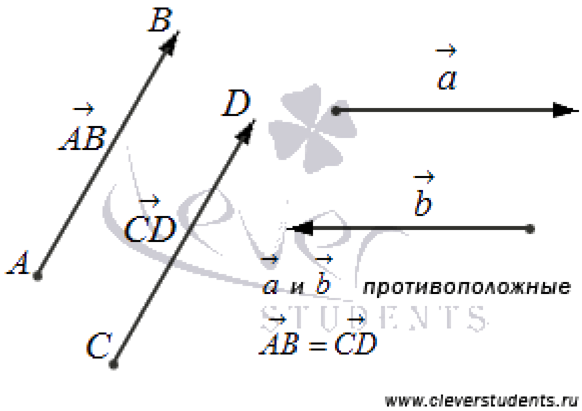
Два коллинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют **противоположно направленными**, если их направления противоположны и обозначают $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.



Равенство векторов

Два вектора называются равными, если они сонаправленные и их длины равны.

Два вектора называются противоположными, если они противоположно направлены и их длины равны.



Понятие равных векторов дает нам возможность рассматривать векторы без привязки к конкретным точкам. Другими словами, мы имеем возможность заменить вектор равным ему вектором, отложенным от любой точки.

Пример. Определить какие из векторов равны a = {1; 2; 4}, b = {1; 2; 2}, c = {1; 2; 4}.

Решение:

a = c - так как их координаты равны,
a ≠ b - так как их координаты не равны,
b ≠ c - так как их координаты не равны.

Задача для самостоятельного решения . При каком значении параметра n вектора a = {1; 2; 4} и b = {1; 2; 2n} равны.

Решение:

Проверим равенство компонентов векторов
ax = bx = 1
ay = by = 2
az = bz => 4 = 2n => n = 4/2 = 2

Ответ: при n = 2 вектора a и b равны

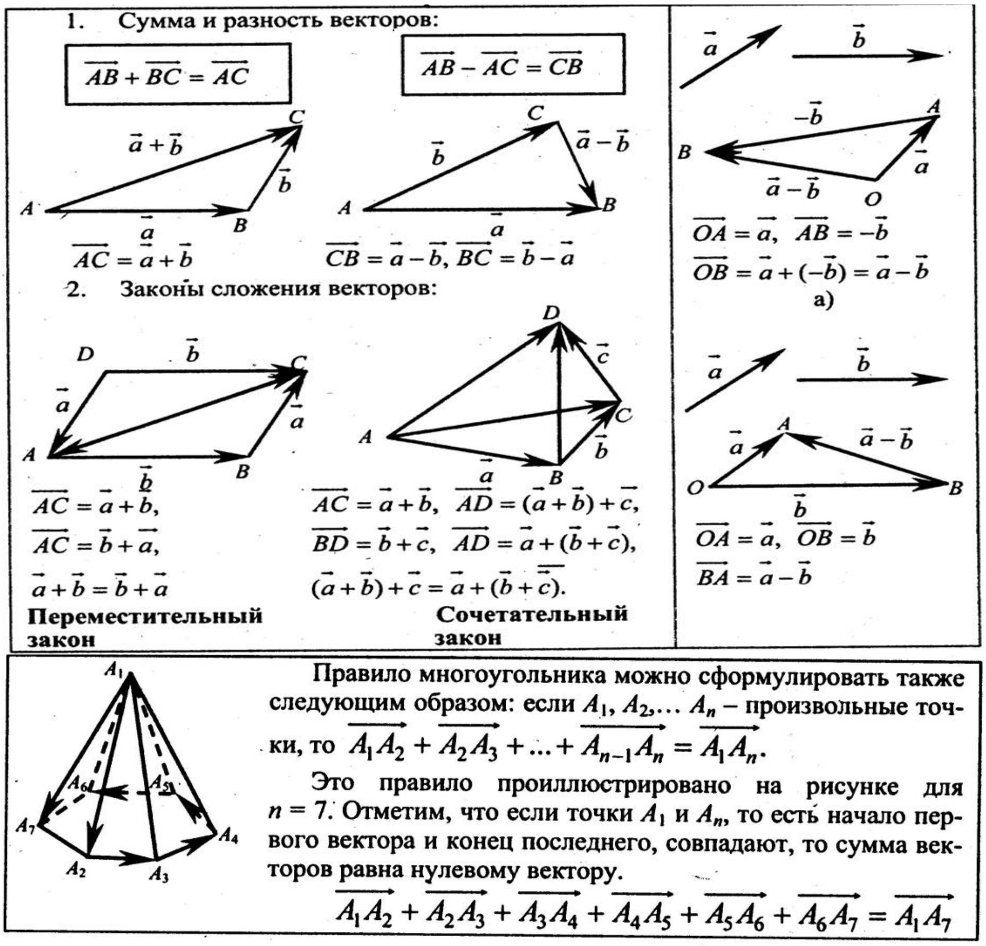
Урок №207
Сложение векторов

Формулы сложения и вычитания векторов для пространственных задач

В случае пространственной задачи сумму и разность векторов a = {ax ;ay ; az} и b = {bx ; by ; bz} можно найти воспользовавшись следующими формулами:

a + b = {ax + bx; ay + by; az + bz}

a - b = {ax - bx; ay - by; az - bz}



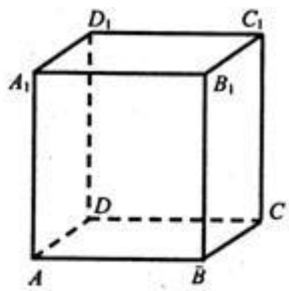
Пример . Найти сумму векторов a = {1; 2; 5} и b = {4; 8; 1}.
Решение:

a + b = {1 + 4; 2 + 8; 5 + 1} = {5; 10; 6}

Задача для самостоятельного решения . Найти разность векторов a = {1; 2; 5} и b = {4; 8; 1}.
Решение:

a - b = {1 - 4; 2 - 8; 5 - 1} = {-3; -6; 4}

Пример. На рисунке изображен параллелепипед АВСДА1В1С1Д1. Назовите вектор, начало и конец которого является вершинами параллелепипед, равный сумме векторов:



а) $\vec{AB}+\vec{A_1Д_1}=\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$

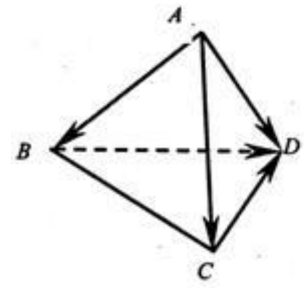
б) $\vec{AB}+\vec{AД_1}=\vec{Д_1C_1}+\vec{AД_1}=\vec{AC_1}$

в) $\vec{ДA}+\vec{B_1B}=\vec{C_1B_1}+\vec{B_1B}=\vec{C_1B}$

г) $\vec{ДД_1}+\vec{ДB}=\vec{ДД_1}+\vec{Д_1B_1}=\vec{ДB_1}$

д) $\vec{ДB_1}+\vec{BC}=\vec{ДB_1}+\vec{B_1C_1}=\vec{ДC_1}$

Пример. Тетраэдр АВСД. Докажите, что $\vec{AB}+\vec{BД}=\vec{AC}+\vec{CД}$.



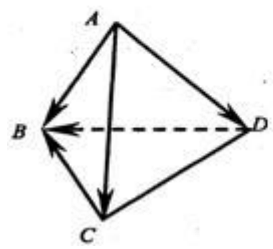
Дано: АВСД – тетраэдр

Докажите, что $\vec{AB}+\vec{BД}=\vec{AC}+\vec{CД}$.

Решение: $\vec{AB}+\vec{BД}=\vec{AД}$, $\vec{AC}+\vec{CД}=\vec{AД}$.

Следовательно, $\vec{AB}+\vec{BД}=\vec{AC}+\vec{CД}$.

Задачи для самостоятельного решения. Дан тетраэдр АВСД. Найдите сумму:



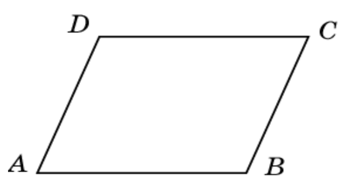
а) $\vec{AB}+\vec{BД}+\vec{ДC}=\vec{AC}$

б) $\vec{AД}+\vec{ДC}+\vec{CB}=\vec{AB}$

в) $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CД}+\vec{ДA}=\vec{0}$

В параллелограмме *ABCD* укажите векторы:

а) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$;



б) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$;

в) $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$;

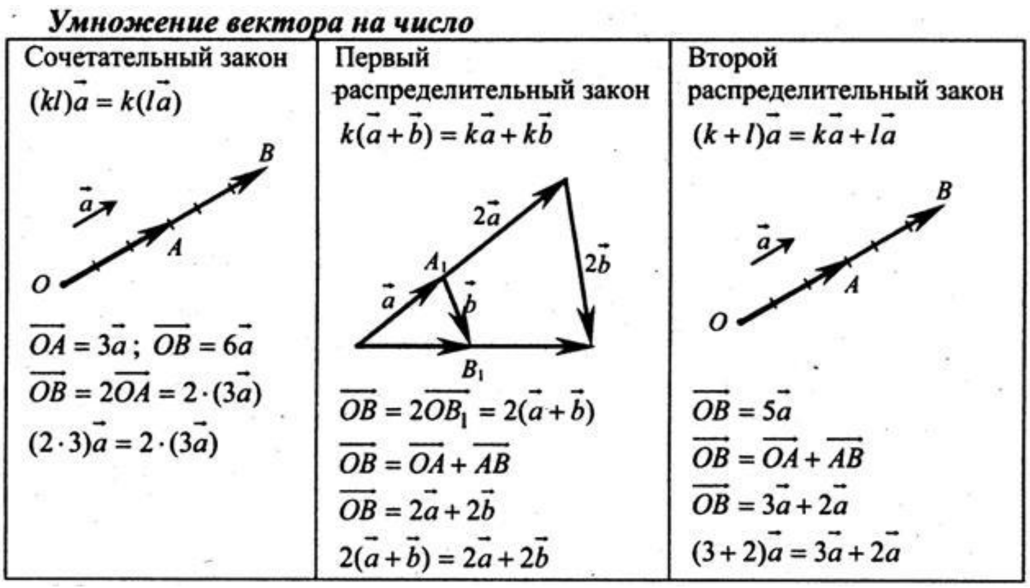
г) $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DA}$;

д) $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}$.

Умножение вектора на число

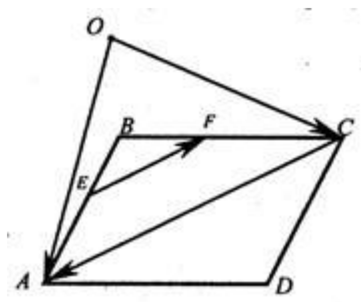
Сформулируем **правило умножения вектора на число**: $\kappa \cdot \vec{a} = \vec{в}$;

Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то $|\vec{в}| = |\kappa| \cdot |\vec{a}|$, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{в}$ при $\kappa \geq 0$;
$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{в}$ при $\kappa < 0$.
Если $\vec{a} = \vec{0}$, то $\vec{в} = \vec{0}$.



Умножение вектора на число

Сочетательный закон	Первый распределительный закон	Второй распределительный закон
$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$	$k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$	$(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$
$\overrightarrow{OA} = 3\vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = 6\vec{a}$	$\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OB_1} = 2(\vec{a}+\vec{b})$	$\overrightarrow{OB} = 5\vec{a}$
$\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA} = 2\cdot(3\vec{a})$	$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$
$(2\cdot 3)\vec{a} = 2\cdot(3\vec{a})$	$\overrightarrow{OB} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$	$\overrightarrow{OB} = 3\vec{a} + 2\vec{a}$
	$2(\vec{a}+\vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$	$(3+2)\vec{a} = 3\vec{a} + 2\vec{a}$



Пример. Точки *E* и *F* – середины сторон *АВ* и *ВС* параллелограмма *АВСД*, а *О* – точка произвольная точка пространства. Выразите вектор $\vec{OA} - \vec{OC}$ через вектор $\vec{EF}$.

Решение: $\vec{OA} - \vec{OC} = \vec{CA}$

Так как *EF* – средняя линия треугольника *ABC, EF*|| *AC* и *EF* = *1/2 AC.*

Поэтому $\vec{EF} = \frac{1}{2}\vec{CA}$, $\vec{CA} = -2\vec{EF}$, $\vec{OA} - \vec{OC} = -2\vec{EF}$

Пример. Найти произведение вектора $\boxed{a}$ = {1; 2; -5} на -2.

Решение: (-2) · $\boxed{a}$ = {(-2) · 1; (-2) · 2; (-2) · (-5)} = {-2; -4; 10}.

Пример. Даны векторы $\bar{a}(0; 4; -7)$ и $\bar{b}(7; -9; 1)$. Найти $3\bar{a} - 2\bar{b}$ и $-\bar{a} + 4\bar{b}$

$$3\bar{a}-2\bar{b}=3(0;4;-7)-2(7;-9;1)=(0;12;-21)-(14;-18;2)=$$
$$=(0-14;12-(-18);-21-2)=(-14;30;-23)$$

$$-\bar{a}+4\bar{b}=-(0;4;-7)+4(7;-9;1)=(0;-4;7)+(28;-36;4)=$$
$$=(0+28;-4-36;7+4)=(28;-40;11)$$

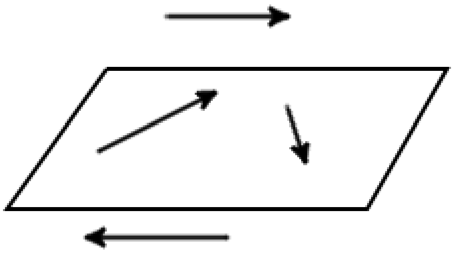
Задача для самостоятельного решения.

Упростить выражение:

$$2(\vec{m}+\vec{n})-3(4\vec{m}-\vec{n})+\vec{n}=-9\vec{m}+5\vec{n}$$

Компланарные векторы. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

Вектора, параллельные одной плоскости или лежащие на одной плоскости называют **компланарными векторами**.



Урок №208

Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

Теорема. Любой вектор $\boldsymbol{m}$ может быть представлен, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации трех любых некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$:

$$\boldsymbol{m} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}. \qquad (1)$$

Прежде всего отметим, что никакие два вектора из векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ не коллинеарны; в противном случае векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ были бы компланарны. Поэтому, если вектор $\boldsymbol{m}$ компланарен с какими-нибудь двумя векторами (например, с $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$), то $\boldsymbol{m} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$ (§ 8) и, следовательно,

$$\boldsymbol{m} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + 0 \bullet \boldsymbol{c},$$

т. е. в этом случае теорема доказана.

Пусть вектор $\boldsymbol{m}$ не компланарен ни с какими двумя векторами из векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ (рис. 30).

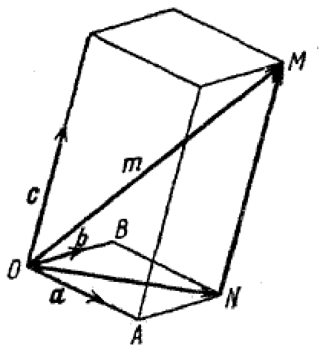


Рис. 30.

Приведем все векторы к общему началу О и проведем через точку М (конец направленного отрезка, изображающего вектор $\mathbf{OM}^{>} = \boldsymbol{m}$) прямую, параллельную вектору $\boldsymbol{c}$. Эта прямая пересечет плоскость OAB в некоторой точке N. Ясно, что

$$\mathbf{OM}^{>} = \mathbf{ON}^{>} + \mathbf{N\,M}^{>}.$$

По свойству коллинеарных векторов $\mathbf{N\,M}^{>} = z\boldsymbol{c}$.

По теореме о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам существуют числа x, y такие, что $\mathbf{ON}^{>} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$.

Таким образом,

$$\mathbf{OM}^{>} = \mathbf{ON}^{>} + \mathbf{N\,M}^{>} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}.$$

Единственность разложения вектора $\boldsymbol{m}$ по векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$: доказывается аналогично тому, как это было сделано в теореме о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам (§ 8).

Базисом пространства называются любые три некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

Пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ — некоторый базис, и $\boldsymbol{a}$ — произвольный вектор. Тогда, по только что доказанной теореме, существуют три числа x, y, z таких, что

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3.$$

Числа x, y и z называются координатами вектора $\boldsymbol{a}$ в данном базисе. В этом случае пишут $\boldsymbol{a} = (x; y; z)$.

Пример. Дано: ΔABC; A(1; 6; 2), 5(2; 3; -1), C(-3; 4; 5) .

Разложить: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ по координатным векторам $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$.

Решение:

1) $\overrightarrow{AB}\{1;-3;-3\}$; $\overrightarrow{AB}=\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}$

2) $\overrightarrow{BC}\{-5;1;6\}$; $\overrightarrow{BC}=-5\vec{i}+\vec{j}+6\vec{k}$.

3) $\overrightarrow{CA}\{4;2;-3\}$; $\overrightarrow{CA}=4\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$.

Пример. A(1; 1; 1), B(-1; 0; -1), C(0; 2; 2), D(2; 0; 0).

Установить: A; B; C; D лежат ли в одной плоскости.

Решение:

$\overrightarrow{AB}\{-2;-1;-2\}$

1) $\overrightarrow{AC}\{-1;1;1\}$. Векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{AD}\{1;-1;-1\}$ — коллинеарные, так как их координаты пропорциональные числа.

2) Проверим компланарность векторов. Предположим, что вектор $\overrightarrow{AD}$ можно разложить по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AD}=x\cdot\overrightarrow{AB}+y\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}\{1;-1;1\}=x\cdot\overrightarrow{AB}\{-2;-1;-2\}+y\cdot\overrightarrow{AC}\{-1;1;1\}$

$$\begin{cases}-2x-y=1,\\-x+y=-1,\\-2x+y=-1,\end{cases}\quad\begin{cases}2x+y=-1 & (1)\\x-y=1 & (2)\\2x-y=1 & (3)\end{cases}$$

$$(1)-(3):\begin{matrix}2x+y=-1\\2x-y=1\end{matrix}\quad 4x=0,\ x=0\ y=-1$$

(2): 0 + 1 = 1; 1 = 1 (верно) векторы $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ - компланарны. Точки A; B; C; D лежат в одной плоскости.

Задача для самостоятельного решения.

A(1; 0; -1), B(-2; -1; 0), C(0; -2; -1), D(1; 5; 0).

Установить: A; B; C; D лежат ли в одной плоскости.

Решение:

$\overrightarrow{AB}\{-3;-1;1\}$

1) $\overrightarrow{AC}\{-1;2;0\}$. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AD}\{0;5;1\}$

$\overrightarrow{AD}$ - неколлинеарные, так как их координаты не пропорциональны.

2) Проверим компланарность векторов. Предположим, что вектор $\overrightarrow{AD}$ можно

разложить по векторам $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$

$$\vec{AD} = x\cdot\vec{AB} + y\cdot\vec{AC},\ \vec{AD}\{0;5;1\} = x\cdot\vec{AB}\{-3;-1;1\} + y\cdot\vec{AC}\{-1;-2;0\}.$$

$$\begin{cases}-3x-y=0,\\ -x-2y=5,\\ x=1,\end{cases}\quad \begin{cases}3x+y=0 & (1)\\ x+2y=-5 & (2)\\ x=1 & (3)\end{cases}$$

$$(1)\ :\ \begin{matrix}3+y=0\\ y=-3\end{matrix}\quad (2):\ 1-6=-5;$$

-5 = -5 (верно) векторы $\vec{AD};\ \vec{AB};\ \vec{AC}$ - компланарны. Точки A; B; C; D лежат в одной плоскости.

Пример. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Разложить вектор **AK**>, где K — центр грани BCC_1B_1 по векторам ***a*** = **AB**>, ***b*** = **AC**>, ***c*** = $\mathbf{AA_1}$> (рис. 31).

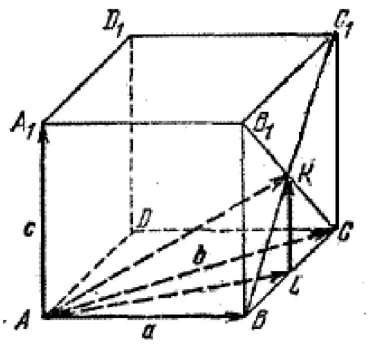


Рис. 31.

Из △ AKL имеем **AK**> = **AL**> + **LK**>, но

$$\vec{AL} = \frac{\vec{AB}+\vec{AC}}{2} = \frac{a+b}{2},\quad \text{а}\quad \vec{LK} = \frac{\vec{AA_1}}{2} = \frac{c}{2}$$

Следовательно,

$$\vec{AK} = \frac{a+b}{2} + \frac{c}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c.$$

Задача для самостоятельного решения.

Пусть векторы **DA**>, **DB**>, **DC**>, изображенные соответствующими направленными ребрами треугольной пирамиды ABCD, образуют базис. Найти координаты вектора $\mathbf{AB}^{>}$ в этом базисе.

Воспользуемся рис. 29а.

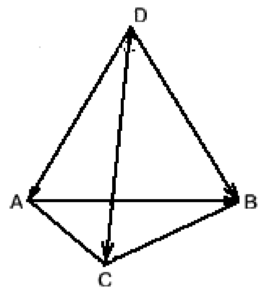


Рис. 29а

Обозначив $\mathbf{DA}^{>} = \boldsymbol{e}_1$, $\mathbf{DB}^{>} = \boldsymbol{e}_2$, $\mathbf{DC}^{>} = \boldsymbol{e}_3$, получим $\mathbf{AB}^{>} = \mathbf{DB}^{>} — \mathbf{DA}^{>} = — \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ или $\mathbf{AB}^{>} = — 1 \bullet \boldsymbol{e}_1 + 1 \bullet \boldsymbol{e}_2 + 0 \bullet \boldsymbol{e}_3$,

откуда $\mathbf{AB}^{>} = (— 1;\ 1;\ 0)$.

Урок №209

Прямоугольная система координат. Проекция вектора на оси

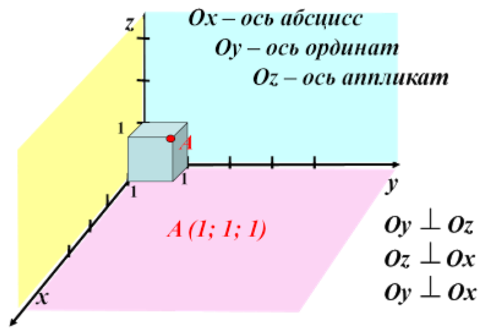
Если через точку пространства проведены три попарно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбрано направление (оно обозначается стрелкой) и выбрана единица измерения отрезков, то говорят, что задана **прямоугольная система координат** в пространстве.

Прямые с выбранными на них направлениями называются осями координат, а их общая точка — **началом координат.** Она обозначается обычно буквой О.

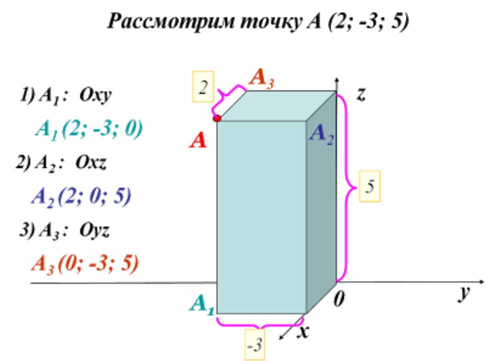
Оси координат обозначаются так: **Ox, Oy, Oz** — и имеют названия: **ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат.** Вся система координат обозначается **Oxyz.**

Плоскости, проходящие соответственно через оси координат **Ox** и **Oy, Oy** и **Oz, Oz** и **Ox,** называются **координатными плоскостями** и обозначаются **Oxy, Oyz, Ozx**.

Точка О разделяет каждую из осей координат на два луча. Луч, направление которого совпадает с направлением оси, называется **положительной полуосью,** а другой луч **отрицательной полуосью.**

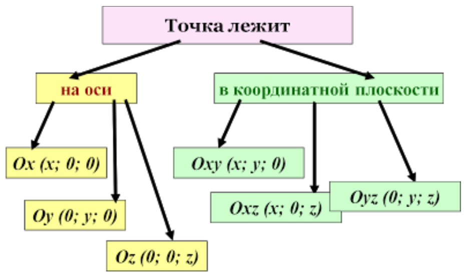


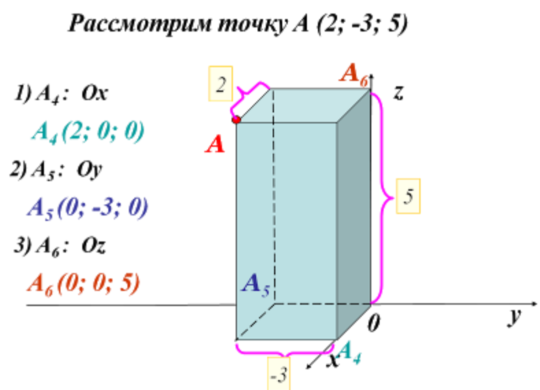
В прямоугольной системе координат каждой точке A пространства сопоставляется тройка чисел, которые называются ее ***координатами***. Они определяются аналогично координатам точек на плоскости.



Проведем через точку A три плоскости, перпендикулярные к осям координат, и обозначим через A_1***,*** A_2 ***и*** A_3.
Точки пересечения этих плоскостей соответственно с осями абсцисс, ординат и аппликат. Первая координата точки A (она называется абсциссой и обозначается обычно буквой x) определяется так: $x = OA_1$, если A_1 точка положительной полуоси: $x = -OA_1$, если A_1 точка отрицательной полуоси: $x = 0$, если A_1 совпадает с точкой O. Аналогично с помощью точки A_2 определяется вторая координата (ордината) y точки A, а с помощью точки A_3 третья координата (аппликата) z точки A. Координаты точки A записываются в скобках после обозначения точки: $A\ (x; y; z)$, причем первой указывают абсциссу, второй ординату, третьей — аппликату.

Если точка $A\ (x; y; z)$ лежит на координатной плоскости или на оси координат, то некоторые ее координаты равны нулю.





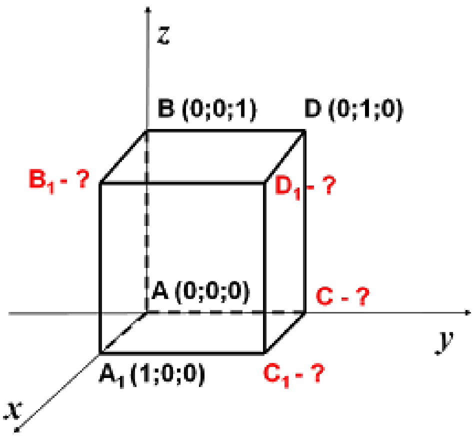
Пример.

$B_1\ (1;\ 0;\ 1)$

$C\ (0;\ 1;\ 0)$

$C_1\ (1;\ 1;\ 0)$

$D_1\ (1;\ 1;\ 1)$



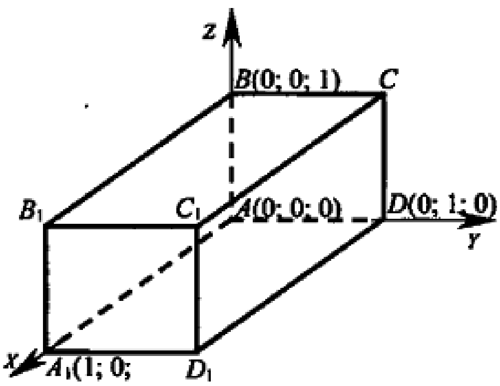
Пример

Дано: координаты четырех вершин куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$: $A\ (0;\ 0;\ 0)$, $B\ (0;\ 0;\ 1)$, $D\ (0;\ 1;\ 0)$, $A_1\ (1;\ 0;\ 0)$.

Найти: координаты остальных вершин.

Решение.

Изобразим на рисунке систему координат $Axyz$ и отметим точки B_1, D_1, A_1. Проведем через эти точки плоскости, перпендикулярные осям координат. В результате получится куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$
Видно, что вершины C, B_1, C_1, D_1 имеют следующие координаты: $C\ (0;\ 1;\ 1)$, $B_1\ (1;\ 0;\ 1)$, $C_1\ (1;\ 1;\ 1)$, $D_1\ (1;\ 1;\ 0)$.



Задача для самостоятельного решения

Заполните пропуски.

Дана точка $M(2; -3; 0)$. Числа 2, -3, ___ называются ______________ ______________ точки M; число 2 — это ______________ точки, число -3 — ______________, число 0 — ______________

Заполните пропуски:

а) точка $C(0; -3; 0)$ лежит на оси ______________

б) точка $E(2; 0; -1)$ лежит на ______________

в) точка $M(0; 0; m)$ лежит на ______________

г) точка $T(0; t; 0)$ лежит на ______________

Заполните пропуски:

а) точка $C(0; -3; 0)$ лежит на оси ______________

б) точка $E(2; 0; -1)$ лежит на ______________

в) точка $M(0; 0; m)$ лежит на ______________

г) точка $T(0; t; 0)$ лежит на ______________

Урок №210

Координаты вектора. Связь между координатами векторов и координатами точек. Простейшие задачи в координатах.

Единичным вектором или **ортом** называется вектор, длина которого равна единице и который направлен вдоль какой-либо координатной оси.

Единичный вектор, направленный вдоль оси x, обозначается $\vec{i}$; единичный вектор, направленный вдоль оси y – $\vec{j}$; вдоль оси z – $\vec{k}$.

Вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называются **координатными векторами.**

По своему построению эти векторы <u>некомпланарны</u>, а значит, любой вектор $\vec{a}$ можно разложить по координатным векторам:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Кроме того, отметим, что по уже доказанному коэффициенты разложения определяются единственным образом. Эти коэффициенты и называются **координатами вектора** $\vec{a}$ в данной системе координат.

Следующие утверждения доказываются аналогично их планиметрическим аналогам.

- Координаты нулевого вектора равны нулю.

- Координаты равных векторов соответственно равны.

Вектор, конец которого совпадает с данной точкой, **а начало – с началом координат,** называется **радиус-вектором** данной точки.

Координаты любой точки равны соответствующим координатам ее радиус-вектора.

Рассмотрим теперь две точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и $A_2(x_2; y_2; z_2)$. По только что доказанному, $\overrightarrow{A_1A_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. Итак, каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала. Но длина вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ по определению равна длине отрезка A_1A_2, а длина этого отрезка есть расстояние между точками A_1 и A_2. Значит,

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Эта формула позволяет вычислять длину вектора, зная его координаты.

Пример. Найти координаты вектора AB, если A(1; 4; 5), B(3; 1; 1).

Решение:вектор AB = {3 - 1; 1 - 4; 1 - 5} = {2; -3; -4}.

Пример. Найти координаты точки B вектора AB = {5; 1; 2}, если координаты точки A(3; -4; 3).

Решение:

$AB_x = B_x - A_x \Rightarrow B_x = AB_x + A_x \Rightarrow B_x = 5 + 3 = 8$
$AB_y = B_y - A_y \Rightarrow B_y = AB_y + A_y \Rightarrow B_y = 1 + (-4) = -3$
$AB_z = B_z - A_z \Rightarrow B_z = AB_z + A_z \Rightarrow B_z = 2 + 3 = 5$

Ответ: B(8; -3; 5).

Задача для самостоятельного решения. Найти координаты точки A вектора AB = {5; 1; 4}, если координаты точки B(3; -4; 1).

Решение:

$AB_x = B_x - A_x \Rightarrow A_x = B_x - AB_x \Rightarrow A_x = 3 - 5 = -2$
$AB_y = B_y - A_y \Rightarrow A_y = B_y - AB_y \Rightarrow A_y = -4 - 1 = -5$
$AB_z = B_z - A_z \Rightarrow A_z = B_z - AB_z \Rightarrow A_z = 1 - 4 = -3$

Ответ: A(-2; -5; -3).

Простейшие задачи в координатах

1. Задача на нахождение координат середины отрезка (рис. 1). Даны две точки: A(x1;y1z1), B(x2;y2;z2), C – середина AB. Найти: C(x;y;z).

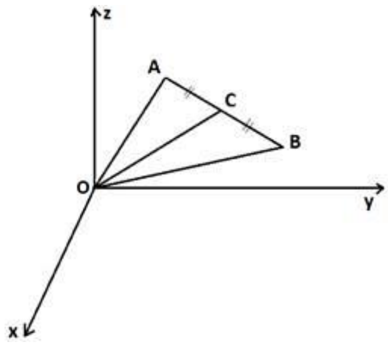


Рис. 1. Координаты середины отрезка

Решение: Обозначим в пространстве точки A, B и C – середину отрезка AB.
Вектор $\overline{OC}$ является половиной суммы векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, потому что OC – это половина диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$. Координаты точки С находятся, как полусумма координат концов отрезка AB - точек A и B. Найдем координаты точки С:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},\quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

2. Задача на нахождение модуля вектора через его координаты (рис. 2). Если у нас есть вектор $\bar{a}\{x; y; z\}$, то его модуль вычисляется по формуле: $|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

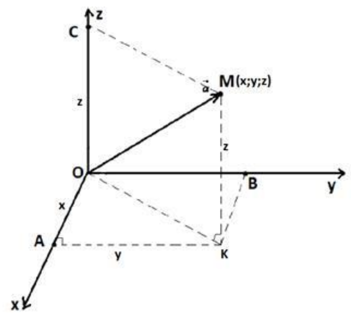


Рис. 2.

Рассмотрим вывод этой формулы.

1) Начертим вектор $\bar{a}$ и совместим его начало с началом координат, чтобы координаты точки M совпадали с координатами вектора.

2) Опустим перпендикуляр из точки M на плоскость Oxy, получаем точку K.

3) Рассмотрим ΔAOK. OA=x - первая координата точки M, отрезок AK=y – вторая координата точки M. Гипотенуза ΔAOK, $OK = \sqrt{x^2 + y^2}$ - по теореме Пифагора.

4) Рассмотрим ΔOKM - прямоугольный, так как МК - перпендикуляр к плоскости Oxy. $OK=\sqrt{x^2+y^2}$, MK=z.

$OM=\sqrt{OK^2+MK^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ - по теореме Пифагора.

3. Задача на нахождение расстояния между точками, которые заданы координатами (рис. 3). Дано: A(x1;y1z1), B(x2;y2;z2). Найти: длину отрезка АВ.

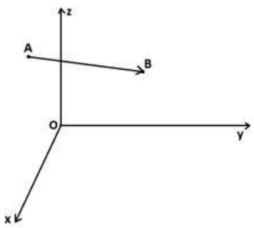


Рис. 3.

Решение:

1) Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AB}\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$.

2) Найдем модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ по его координатам: $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)+(y_2-y_1)+(z_2-z_1)}$.

Пример.

Дано: A(-3;m;5), B(2;-2;n), C – середина AB, $C\in Ox$. Найти: m, n.

Решение: Так как $C\in Ox$, мы знаем две координаты точки С – (x;0;0). Запишем формулу середины отрезка для отрезка АВ и его середины – С. Получаем три уравнения:

$$x=\frac{-3+2}{2};\quad 0=\frac{m-2}{2}\Rightarrow m=2;\quad 0=\frac{5+n}{2}\Rightarrow n=-5.$$

Ответ: $m=2$, $n=-5$.

Пример.

Дано: M(-4;7;0), N(0;-1;2), C – середина MN. Найти: расстояние от начала координат до точки С.

Решение: Сначала найдем координаты точки С. Ее координаты равны полусумме соответствующих координат. $C\left(\frac{-4+0}{2};\frac{7-1}{2};\frac{0+2}{2}\right)=C(-2;3;1)$.

Нужно найти расстояние от начала координат до точки С. Это значит, что мы должны найти длину отрезка ОС или модуль вектора $\overline{OC}$. Так как $\overline{OC}$ - радиус-вектор, то координаты этого вектора равны координатам точки $C(-2;3;1)$. Воспользуемся формулой нахождения длины вектора по его координатам:

$$OC = \left|\overline{OC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$$

.

Ответ: $\sqrt{14}$.

Задача для самостоятельного решения.

1.Найти координаты точки С середины отрезка АВ заданного точками A(-1, 3, 1) и B(6, 5, -3).

Ответ: C(2.5, 4, -1).

2.Найти координаты точки В если известны координаты точки C(1, 5, 2), середины отрезка АВ и точки A(-1, 3, 10).

Ответ: B(3, 7, -6).

3. Найти длину вектора $\boxed{a}$ = {2; 4; 4}.

Ответ: 6.

4. Найти длину вектора $\boxed{a}$ = {-1; 0; -3}.

Ответ: $\sqrt{\boxed{10}}$.

5.Определите расстояние между точками в трехмерной системе координат M(9;-3;1) и N(4;6;-14).

Ответ:18,19

6.В трехмерном пространстве заданы координаты двух точек $A(1, 2, 3)$ и $B(-7, -2, 4)$. Найдите расстояние между ними.

Ответ:9

Урок №211-212

Скалярное произведение векторов.

Геометрическая интерпретация. Скалярным произведением двух векторов $\boxed{a}$ и $\boxed{b}$ будет скалярная величина, равная произведению модулей этих векторов умноженного на косинус угла между ними:

$$\boxed{a} \cdot \boxed{b} = |\boxed{a}| \cdot |\boxed{b}| \cos \alpha$$

Алгебраическая интерпретация. Скалярным произведением двух векторов $\boxed{a}$ и $\boxed{b}$ будет скалярная величина, равная сумме попарного произведения координат векторов $\boxed{a}$ и $\boxed{b}$.

Формула скалярного произведения векторов для пространственных задач

В случае пространственной задачи скалярное произведение векторов $\boxed{a} = \{a_x ; a_y ; a_z\}$ и $\boxed{b} = \{b_x ; b_y ; b_z\}$ можно найти воспользовавшись следующей формулой:

$$\boxed{a} \cdot \boxed{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

Обозначение: скалярное произведение обозначается через $\bar{a} \cdot \bar{b}$ или просто $\bar{a}\bar{b}$.

Результат операции является ЧИСЛОМ: Умножается вектор на вектор, а получается число. Действительно, если длины векторов $|\bar{a}|, |\bar{b}|$ – это числа, косинус угла – число, то их произведение $|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\angle(\bar{a}; \bar{b})$ тоже будет числом

Свойства скалярного произведения векторов

1. Скалярное произведение вектора самого на себя всегда больше или равно нуля:

$$\boxed{a} \cdot \boxed{a} \geq 0$$

2. Скалярное произведение вектора самого на себя равно нулю тогда и только тогда, когда вектор равен нулевому вектору:

$$\boxed{a} \cdot \boxed{a} = 0 \quad <=> \quad \boxed{a} = 0$$

3. Скалярное произведение вектора самого на себя равно квадрату его модуля:

$$\boxed{a} \cdot \boxed{a} = |\boxed{a}|^2$$

4. Операция скалярного умножения коммуникативна:

$$\boxed{a} \cdot \boxed{b} = \boxed{b} \cdot \boxed{a}$$

5. Если скалярное произведение двух не нулевых векторов равно нулю, то эти вектора ортогональны:

$$\boxed{a} \neq 0, \boxed{b} \neq 0, \boxed{a} \cdot \boxed{b} = 0 \quad <=> \quad \boxed{a} \perp \boxed{b}$$

6. $(\alpha\boxed{a}) \cdot \boxed{b} = \alpha(\boxed{a} \cdot \boxed{b})$
7. Операция скалярного умножения дистрибутивна:

$$(\boxed{a} + \boxed{b}) \cdot \boxed{c} = \boxed{a} \cdot \boxed{c} + \boxed{b} \cdot \boxed{c}$$

Угол между векторами может изменяться в пределах $0 \le \angle(\overline{a};\overline{b}) \le \pi$, и при этом возможны следующие случаи:

1) Если **угол** между векторами **острый**: $0 < \angle(\overline{a};\overline{b}) < \frac{\pi}{2}$ (от 0 до 90 градусов), то $\cos\angle(\overline{a};\overline{b}) > 0$, и **скалярное произведение будет положительным**: $\overline{a}\overline{b} > 0$. Особый случай: если векторы *сонаправлены*, то угол между ними считается нулевым $\angle(\overline{a};\overline{b}) = 0$, и скалярное произведение также будет положительным. Поскольку $\cos 0 = 1$, то формула упрощается: $\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|$.

2) Если **угол** между векторами **тупой**: $\frac{\pi}{2} < \angle(\overline{a};\overline{b}) < \pi$ (от 90 до 180 градусов), то $\cos\angle(\overline{a};\overline{b}) < 0$, и, соответственно, **скалярное произведение отрицательно**: $\overline{a}\overline{b} < 0$. Особый случай: если векторы *направлены противоположно*, то угол между ними считается *развёрнутым*: $\angle(\overline{a};\overline{b}) = \pi$ (180 градусов). Скалярное произведение тоже отрицательно, так как $\cos\pi = -1$

Справедливы и обратные утверждения:

1) Если $\overline{a}\overline{b} > 0$, то угол между данными векторами острый. Как вариант, векторы сонаправлены.

2) Если $\overline{a}\overline{b} < 0$, то угол между данными векторами тупой. Как вариант, векторы направлены противоположно.

Но особый интерес представляет третий случай:

3) Если **угол** между векторами **прямой**: $\angle(\overline{a};\overline{b}) = \frac{\pi}{2}$ (90 градусов), то $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ и **скалярное произведение равно нулю**: $\overline{a}\overline{b} = 0$. Обратное тоже верно: если $\overline{a}\overline{b} = 0$, то $\angle(\overline{a};\overline{b}) = \frac{\pi}{2}$. Компактно утверждение формулируется так: **Скалярное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда данные векторы ортогональны**. Короткая математическая запись: $\overline{a}\overline{b} = 0 \Leftrightarrow \overline{a} \perp \overline{b}$

Формула косинуса угла между векторами, которые заданы координатами

Теперь у нас есть полная информация, чтобы ранее выведенную формулу косинуса угла между векторами $\cos\angle(\overline{v};\overline{w}) = \dfrac{\overline{v}\cdot\overline{w}}{|\overline{v}|\cdot|\overline{w}|}$ выразить через координаты векторов $\overline{v}, \overline{w}$:

Косинус угла между векторами плоскости $\overline{v}(v_1;v_2)$ и $\overline{w}(w_1;w_2)$, заданными в ортонормированном базисе $(\overline{i};\overline{j})$, **выражается формулой**:

$$\cos\angle(\overline{v};\overline{w}) = \frac{v_1w_1 + v_2w_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\cdot\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}.$$

Косинус угла между векторами пространства $\overline{v}(v_1;\, v_2;\, v_3),\ \overline{w}(w_1;\, w_2;\, w_3)$, заданными в ортонормированном базисе $(\overline{i};\, \overline{j};\, \overline{k})$, **выражается формулой**:

$$\cos\angle(\overline{v};\, \overline{w}) = \frac{v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \cdot \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}}$$

Пример. Найти скалярное произведение векторов $\boxed{a}$ и $\boxed{b}$, если их длины $|\boxed{a}| = 3$, $|\boxed{b}| = 6$, а угол между векторами равен 60˚.

Решение: $\boxed{a} \cdot \boxed{b} = |\boxed{a}| \cdot |\boxed{b}| \cos \alpha = 3 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 9$.

Ответ:9

Задача для самостоятельного решения.

Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 2,\quad |\overline{b}| = 5,\quad \angle(\overline{a};\overline{b}) = \frac{\pi}{6}$

Решение: Используем формулу $\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\angle(\overline{a};\overline{b})$. В данном случае:

$$\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\angle(\overline{a};\overline{b}) = 2 \cdot 5 \cdot \cos\frac{\pi}{6} = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

Ответ: $\overline{a}\,\overline{b} = 5\sqrt{3}$

Пример. Найти скалярное произведение векторов $\boxed{a} = \{1;\, 2;\, -5\}$ и $\boxed{b} = \{4;\, 8;\, 1\}$.

Решение: $\boxed{a} \cdot \boxed{b} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 8 + (-5) \cdot 1 = 4 + 16 - 5 = 15$.

Ответ:15

Пример. Найти длину вектора $\overline{c} = -\overline{a} + 3\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 3,\quad |\overline{b}| = 2,\quad \angle(\overline{a};\overline{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Решение:

$$|\overline{c}| \overset{(1)}{=} \left|-\overline{a} + 3\overline{b}\right| \overset{(2)}{=} \sqrt{(-\overline{a} + 3\overline{b})^2} \overset{(3)}{=} \sqrt{\overline{a}^2 - 6\overline{a}\overline{b} + 9\overline{b}^2} \overset{(4)}{=} \sqrt{|\overline{a}|^2 - 6 \cdot |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\angle(\overline{a};\overline{b}) + 9 \cdot |\overline{b}|^2} =$$

$$= \sqrt{3^2 - 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos\frac{\pi}{3} + 9 \cdot 2^2} = \sqrt{9 - 36 \cdot \frac{1}{2} + 36} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Ответ: $|\overline{c}| = 3\sqrt{3}$ ед. $\approx 5{,}20$ ед.

Задача для самостоятельного решения.

Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если известно, что $|\overline{a}| = 4,\quad |\overline{b}| = 2\sqrt{2},\quad \overline{a}\,\overline{b} = 8$.

Решение: Используем формулу: $\cos\angle(\overline{a};\, \overline{b}) = \frac{\overline{a}\,\overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|} = \frac{8}{4 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\angle(\overline{a};\overline{b}) = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

Ответ: $\angle(\overline{a};\overline{b}) = \frac{\pi}{4}$ рад. $= 45°$

Задача для самостоятельного решения

Проверить ортогональность векторов: $\overline{a}(1;\ 2;\ -4)$ и $\overline{b}(6;\ -1;\ 1)$

Решение:

Выясним, будут ли ортогональны пространственные векторы. Вычислим их скалярное произведение:
$\overline{a}\overline{b} = 1\cdot 6 + 2\cdot(-1) + (-4)\cdot 1 = 6 - 2 - 4 = 0$, следовательно, $\overline{a} \perp \overline{b}$

Задача для самостоятельного решения

При каком значении λ векторы $\overline{a}(3;\ \lambda;\ -2),\ \overline{b}(2-\lambda;\ -1;\ 5)$ будут ортогональны?

Решение: По условию требуется найти **такое** значение параметра λ, чтобы данные векторы были ортогональны. Два вектора пространства $\overline{v}(v_1;\ v_2;\ v_3),\ \overline{w}(w_1;\ w_2;\ w_3)$ ортогональны тогда и только тогда, когда $v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = 0$.

Дело за малым, составим уравнение:

$\overline{a}\overline{b} = 0$

$3\cdot(2-\lambda) + \lambda\cdot(-1) + (-2)\cdot 5 = 0$

Раскрываем скобки и приводим подобные слагаемые:

$6 - 3\lambda - \lambda - 10 = 0$

$-4\lambda - 4 = 0$

Решаем простейшее линейное уравнение:

$-4\lambda = 4$

$\lambda = -1$

Ответ: при $\lambda = -1$

Урок №213-214

Движения. Центральная, осевая и зеркальная симметрия. Параллельный перенос. Преобразование подобия.

Движением называется преобразование, при котором сохраняются расстояния между точками.

Под движением пространства понимается отображение пространства на себя, при котором любые две точки A и B переходят (отображаются) в некие точки A1 и B1 так, что |AB|=|A1B1|.

Иными словами, движение пространства — это отображение пространства на себя, сохраняющее расстояния между точками. Так же, как и для движения на плоскости, доказывается, что при движении в пространстве

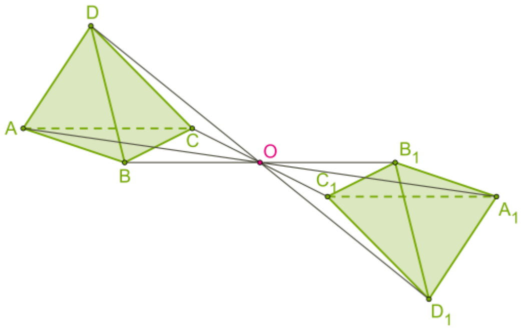
- прямые переходят в прямые,
- полупрямые — в полупрямые,
- отрезки — в отрезки,
- сохраняются углы между прямыми.

Новым свойством движения в пространстве является то, что движение переводит плоскости в плоскости.

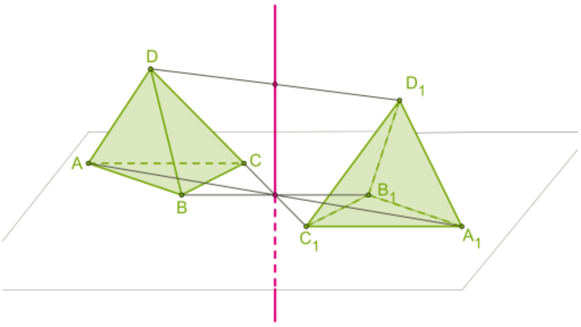
В пространстве, так же как и на плоскости, две фигуры называются равными, если они совмещаются движением.

Виды движения в пространстве

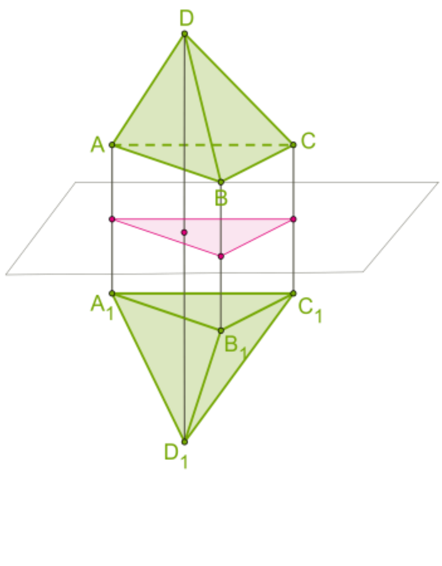
1. Центральная симметрия (симметрия относительно точки):



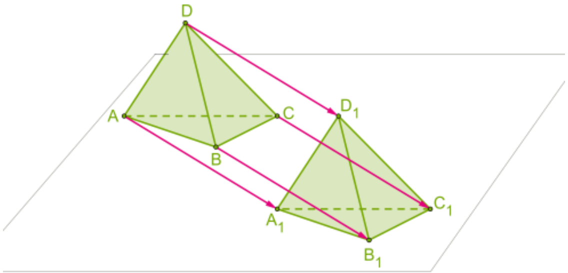
2. Осевая симметрия (симметрия относительно прямой):



3. Зеркальная симметрия (симметрия относительно плоскости):



4. Параллельный перенос (точки переносятся на данный вектор):



Примерные варианты сообщений на тему «Движения в пространстве». Данные сообщения подготовить заранее. При ответе целесообразно воспользоваться проектором.(рисунок)

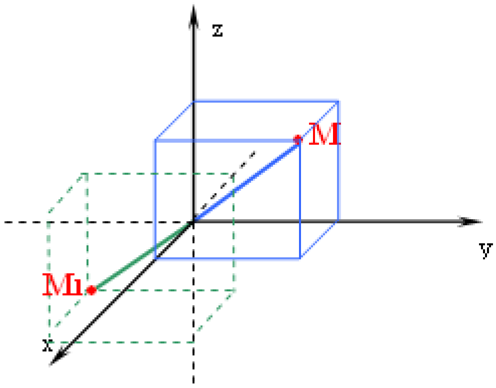
I сообщение.

Центральная симметрия – отображение пространства на себя, при котором любая точка M переходит в симметричную ей точку M_1 относительно данного центра O.

Докажем, что <u>центральная симметрия является движением</u>.

Обозначим точку O – центр симметрии и введем прямоугольную систему координат Oxyz с началом в точке O. Установим связь между координатами двух точек:

$M(x; y; z)$ и $M_1(x_1; y_1; z_1)$. $Z_0(M) = M_1$.



Если $M \neq 0$, то O – середина MM_1. Тогда
$(x+x_1)/2=0$; $(y+y_1)/2=0$; $(z+z_1)/2=0$.
Значит, $x=-x_1$; $y=-y_1$; $z=-z_1$. (1).

Если M=0, то $x = x_1 = y = y_1 = z = z_1 = 0$,

т. е. формулы (1) верны.

Рассмотрим $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $A \longrightarrow A_1$, $B \longrightarrow B_1$, тогда $A_1(-x_1; -y_1; -z_1)$, $B_1(-x_2; -y_2; -z_2)$ (по (1)).

Тогда,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2},$$

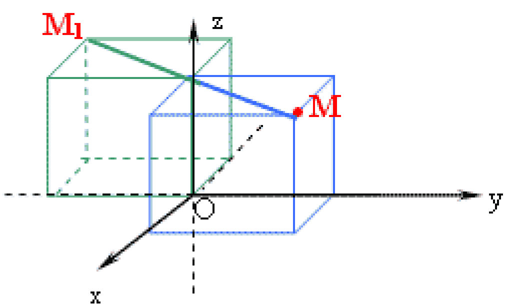
т. е. $AB=A_1B_1$. Тогда Z_o - движение.

II сообщение.

<u>Осевой симметрией</u> с осью а называется такое отображение пространства на себя, при котором любая точка M переходит в симметричную ей точку M_1 относительно оси *a*.

Докажем, что <u>осевая симметрия есть движение</u>.

Введем прямоугольную систему координат Oxyz, совместим ось Oz с осью симметрии и установим связь между координатами точек $M(x; y; z)$ и $M_1(x_1; y_1; z_1)$, если $S_{oz}(M) = M_1$.



Если $M \notin O_z$, то $Oz \perp MM_1$ и проходит через середину.

Т. к. $Oz \notin MM_1$, то $z = z_1$. Т. к. Oz проходит через середину MM_1, то $x = -x_1$, $y = -y_1$.

Если точка M лежит на оси Oz, то $x_1 = x = 0$, $y_1 = y = 0$, $z_1 = z = 0$.

Рассмотрим $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, A—>A_1, B—> B_1, тогда $A_1(-x_1; -y_1; z_1)$, $B_1(-x_2; -y_2; z_2)$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

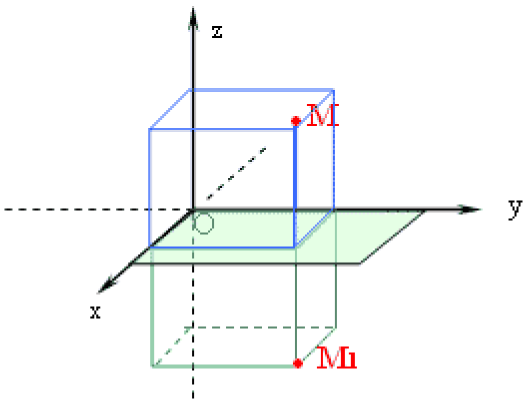
тогда $AB=A_1B_1$, т.е. S_{oz} - движение.

III сообщение.

Зеркальной симметрией называется такое отображение пространства на себя, при котором любая точка M переходит в симметричную ей точку M_1 относительно плоскости *a*.

Докажем, что зеркальная симметрия есть движение.

Введем прямоугольную систему координат Oxyz, совместим плоскость Oxy с плоскостью симметрии и установим связь между координатами точек M(x; y; z) и $M_1(x_1; y_1; z_1)$, где $S_a(M) = M_1$.



Если M не лежит в плоскости Oxy, то $x = x_1$, $y = y_1$, $z = -z_1$.

Если M I Oxy , то $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1 = 0$.

Рассмотрим $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, A—>A_1, B—> B_1, тогда $A_1(x_1; y_1; -z_1)$, $B_1(x_2; y_2; -z_2)$, тогда

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
$$A_1B_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2},$$

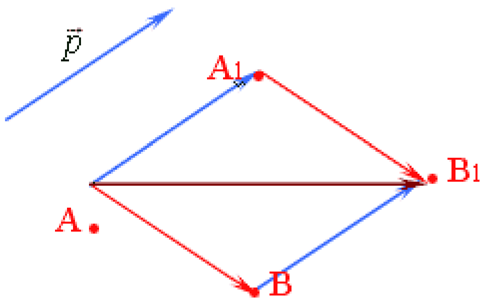
тогда, $AB=A_1B_1$, т.е.S_{Oxy} – движение.

IV сообщение.

Параллельный перенос на вектор p - это такое отображение пространства на себя, при котором любая точка M переходит в такую точку M_1, что вектор MM_1 равен вектору p.

Докажем, что параллельный перенос есть движение.

Пусть параллельный перенос переводит: A—>A_1, B—> B_1, тогда



$\overline{AA_1} = \vec{p}$, $\overline{BB_1} = \vec{p}$

По правилу треугольника

$\overline{AB_1} = \overline{AA_1} + \overline{A_1B_1}$ или $\overline{AB_1} = \overline{AB} + \overline{BB_1}$,

тогда $\overline{AA_1} + \overline{A_1B_1} = \overline{AB} + \overline{BB_1}$, $\vec{p} + \overline{A_1B_1} = \overline{AB} + \vec{p}$.

Тогда $\overline{A_1B_1} = \overline{AB}$. Это значит, что $AB = A_1B_1$.

Учитель: Подведем итоги: центральная симметрия, параллельный перенос, осевая симметрия, зеркальная симметрия в пространстве являются движениями. Также справедливы утверждения о том, что при движении отрезок переходит в отрезок, прямая – в прямую, плоскость – в плоскость.

Пример.

Докажем, что при центральной симметрии:

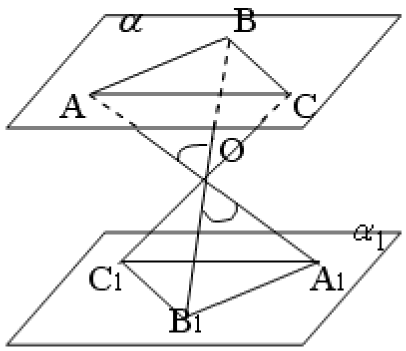
а) плоскость, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей плоскость;

б) плоскость, проходящая через центр симметрии, отображается на себя.

Дано: $Z_o(a) = a_1$

Доказать: $a \parallel a_1$

Решение:



$A \notin a$, $B \notin a$, $C \notin a$, точки A, B, C не лежат на одной прямой, $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$, A_1, B_1, C_1, не лежат на одной прямой, тогда $(A_1, B_1, C_1) = a_1$.

Т.к. $AO = OA_1$, $BO = OB_1$, $\angle AOB = \angle A_1OB_1$, то $\Delta AOB = \Delta A_1OB_1 \Rightarrow AB \parallel A_1B_1$.

Аналогично $BC \parallel B_1C_1$, тогда $a \parallel a_1$ по признаку.

Пример.№478

а) При центральной симметрии относительно точки O (0;0;0) $x_2 = -x_1$; $y_2 = -y_1$; $z_2 = -z_1$.

A(0;1;2) —> A_1(0;-1;-2),

B(3;-1;4) —> B_1(-3;1;-4),

C(1;0;-2) —> C_1(-1;0;2)

б) При осевой симметрии относительно оси Ox $x_2 = x_1$; $y_2 = -y_1$; $z_2 = -z_1$.

A(0;1;2) —> A_1(0;-1;-2),

B(3;-1;4) —> B_1(3;1;-4),

C(1;0;-2) —> C_1(1;0;2)

(Для S_{oy} и S_{oz} рассмотреть дома).

в) **Задача для самостоятельного решения**

При зеркальной симметрии относительно Ozy $x_2 = -x_1$; $y_2 = y_1$; $z_2 = z_1$.

A(0;1;2) —> A_1(0;1;2),

B(3;-1;4) —> B_1(-3;-1;4),

C(1;0;-2) —> C_1(-1;0;-2)

(Для S_{Oxy} рассмотреть дома).

Рассмотрим решение более сложных задач.

Пример. **№ 479**

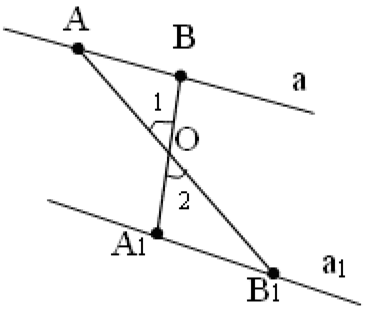
Дано: $Z_o(a) = a_1$

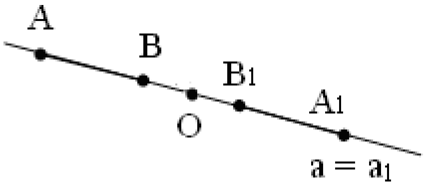
Доказать:

а) $a \parallel a_1$, если $O \notin a$

б) $a = a_1$, если $O \in a$

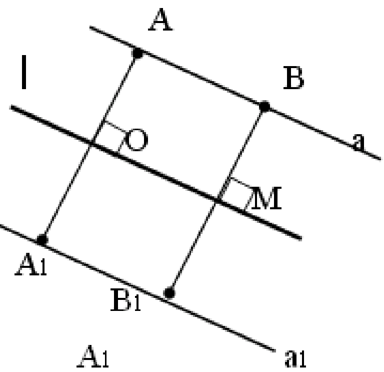
Решение:





а) A —> A_1, B —> B_1, тогда AO = OA_1, BO = OB_1, угол 1 = углу 2, то AOB = $A_1O\,B_1$, значит, угол B = углу B_1, а они внутренние накрест лежащие, тогда AB || A_1B_1.

б) A, B, A_1, B_1 лежат на одной прямой, значит $a = a_1$



Задача для самостоятельного решения

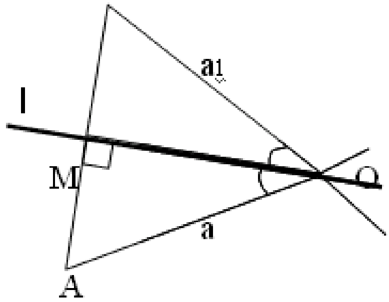
Дано: $S_l(a) = a_1$

Доказать:

а) $a_1 \parallel l$, если $a \parallel l$

б) $\angle(a_1; \ell) = \varphi$, если $\angle(a; \ell) = \varphi$

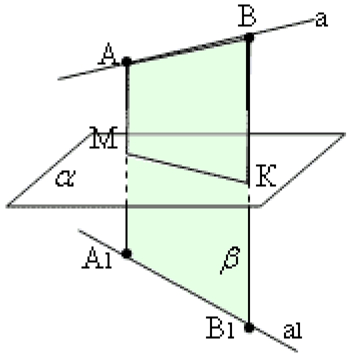
Решение:



а) Если, $a \parallel \ell$ то AO=MB. Тогда $A_1O=MB_1$ (т.к. AO=A_1 $BM = B_1M$), значит, $a_1 \parallel \ell$.

б) $\angle(a; \ell) = \varphi$, $A \to A_1 \Rightarrow AM = MA_1$, $AA_1 \perp \ell$, Δ AOM $=\Delta$ A_1OM (MO – общий катет, $AM = MA_1$). Тогда $\angle AO$ $\angle A_1OM = \varphi$, т.е. $\angle(a_1; \ell) = \varphi$.

Задача для самостоятельного решения



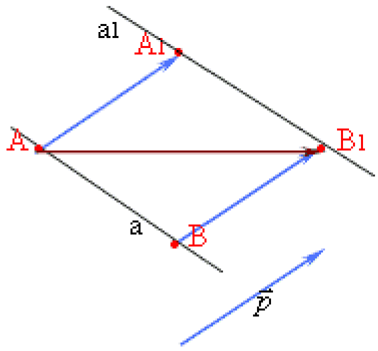
Дано: $S\alpha(a) = a_1$

Доказать: $a \subset \beta$, $a_1 \subset \beta$

Решение:

$A \to A_1$, $B \to B_1$, значит, $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$, тогда $AA_1 \parallel BB_1$, $\{A, B, A_1, B_1\} \subset \beta$, тогда $a \subset \beta$ и $a_1 \subset \beta$.

Пример.



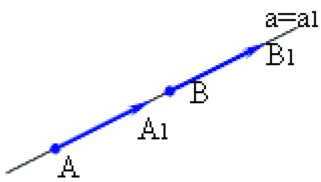
Дано: $\vec{p}(a) = a_1$

Доказать:

а) $a \parallel a_1$, если a не параллельна вектору p

б) $a \parallel a_1$, если a параллельна вектору p

Решение:



а) $A \to A_1$, $B \to B_1$, тогда $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{p}$, значит, $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$,
т.е. ABCD –параллелограмм по признаку. Значит, $AB \parallel A_1B_1$, т.е.
$a \parallel a_1$.

б) Если a параллельна вектору p, то A, B, A_1,B_1 лежат на одной прямой, значит, $a = a_1$.

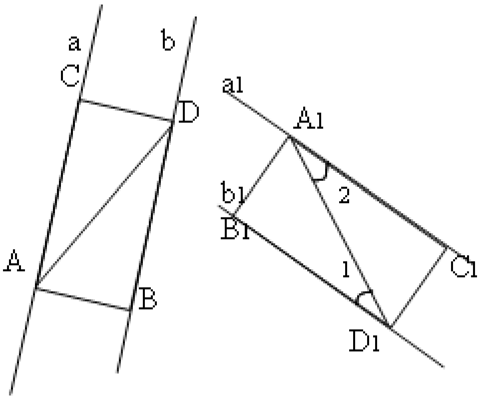
Задача для самостоятельного решения

Дано: движение, $a \parallel b$, $a \to a_1$, $b \to b_1$

Доказать: $a_1 \parallel b_1$

Решение:

$A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$, $D \to D_1$, т.к. при движении сохраняются расстояния, то $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$, $AD = A_1D_1 \Rightarrow \Delta\ ABD = \Delta\ A_1B_1D_1$. Аналогично, Δ AC =Δ $A_1C_1D_1$. Но $\Delta\ ABD = \Delta\ ACD$, тогда $\Delta\ A_1C_1D_1$ =Δ A значит, $\angle 1 = \angle 2$, поэтому $A_1C_1 \parallel B_1D_1$ (т.к. $\angle 1$ и $\angle 2$ внутренние накрест лежащие), т.е. $a_1 \parallel b_1$.



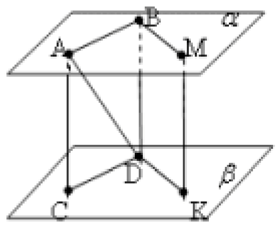
Пример.

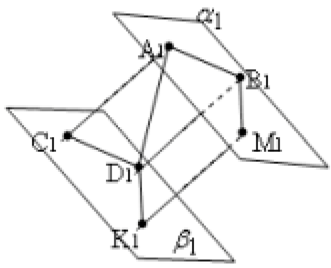
Дано:

движение $\alpha \parallel \beta$
$\alpha \to \alpha_1$, $\beta \to \beta_1$
Доказать: $\alpha_1 \parallel \beta_1$

Решение:

Т.к. $\alpha \parallel \beta$, то AC = DB (расстояние между параллельными плоскостями) т.к. при движении сохраняются расстояния, то
$AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$, $AC = A_1C_1$, $CD = C_1D_1$, $AD = A_1D_1$. $\Rightarrow \Delta\ ACD = \Delta\ A_1C_1D_1$ и
$\Delta\ ABD = \Delta\ A_1B_1D_1$.
Но $\Delta ABD = \Delta\ ACD$, тогда $\Delta A_1C_1D_1 = \Delta\ A_1B_1D_1$, значит, $\angle 1 = \angle 2$, поэтому $A_1B_1 \parallel C_1D_1$. Аналогично, $D_1K_1 \parallel B_1M_1$, поэтому $\alpha_1 \parallel \beta_1$ (по признаку).





Задача для самостоятельного решения

Дано: движение, Окр (O; r)

Доказать: Окр(O; r) —>Окр(O_1; r_1), $r = r_1$

Решение:

Так как движение сохраняет расстояние, то множество точек, расположенных на данном расстоянии r от точки O, отображается на множество точек, расположенных на данном расстоянии (r) от точки O_1.

т.е. Окр (O; r) —>Окр(O_1; r_1) (можно сделать чертеж).

Основные понятия, необходимые для практических занятий

1. Что такое вектор? (*направленный отрезок*)
2. Как он обозначается? (*двумя заглавными латинскими буквами или одной маленькой латинской буквой*)
3. Назовите векторы, изображенные на рисунке. Укажите начало и конец векторов.
4.Какой вектор называется нулевым? (*точка или вектор, у которого начало и конец совпадают*)
5. Какие векторные физические величины вы знаете?
(*скорость, ускорение, сила, напряженность электрического поля, вектор магнитной индукции*)
6. Какие вектора называются равными? (*которые имеют равную длину и одинаковое направление*)
7. Какой вектор называется единичным? (*вектор, длина которого равна 1*)
8. Как отложить вектор от данной точки? (*провести через эту точку прямую, параллельную той, на которой находится вектор, и отложить от этой точки отрезок, длина которого равна вектору*)
9. Как сложить два вектора? (*по правилу треугольника или по правилу параллелограмма*)
10. Как вычислить координаты вектора, если известны координаты начальной и конечной точки? (*нужно из координат конца вычесть координаты начала*)
11. Как умножить вектор на число, если известны его координаты? (*нужно каждую координату вектора умножить на это число*)
12. Как вычислить длину вектора, если известны его координаты?
($по\ формуле |a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$)
13. Что такое скалярное произведение векторов? ($\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$)
14. Как найти скалярное произведение векторов, если известны его координаты?
($по\ формуле\ \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$)
15. Как найти косинус угла между векторами, если известны его координаты?
($по\ формуле\ cos\,\varphi = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$)

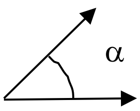
Тематические кроссворды:

Кроссворд 1.

^{1}п	е	р	п	е	н	д	и	к	у	л	я	р	н	ы	е		
р																	
о																	
и		^{2}у	г	о	л									^{3}н			
з		с												у			
^{4}в	е	к	т	о	^{5}р			^{6}с			^{7}к			л			
е		о			а			к			о			е			
д		р			в			о			н			в			
е		е			^{8}н	а	п	р	я	ж	е	н	н	о	с	т	ь
н		н			ы			о			ц			й			
и		и			е			с									
е		е						т									
								ь									

По горизонтали:

1. Как называются векторы, угол между которыми равен 90^0? (прил.)

2. Что такое α? 

4. Латинское - «несущий».

8. Векторная физическая величина – характеристика электрического поля.

По вертикали:

1. Что такое $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$ (сущ.)

2. Векторная физическая величина, характеризующая изменение скорости с течением времени.

3. Вектор, обозначаемый точкой. (прил.)

5. Векторы, одинаковые по длине и направлению. (прил.)

6. Векторная физическая величина, обозначаемая как $\vec{v}$.

7. У каждого вектора есть начало и …

Кроссворд 2

										^{1}с				
										к				
					^{2}у		^{3}н		^{4}н	а	ч	а	л	о
					с		у			л				
			^{5}п		к		л			я				
			р		о		е			р			^{6}в	
^{7}с	о	н	а	п	р	а	в	л	е	н	н	ы	е	
к			в		е		о			о			к	
о			и		н		й			е			т	
р			л		и								о	
о			о		е								р	
с														

[8]т	р	е	[9]у	г	о	л	ь	н	и	к
ь			г							
			о							
			л							

По горизонтали:

4. У каждого вектора есть … и конец.
7. Как называются векторы одинакового направления? (прил.)
8. Как называется способ сложения векторов, когда из конечной точки откладывается следующий вектор? (второе слово, ед.ч.)

По вертикали:

1. Какое произведение векторов используется при определении работы? (прил.)
2. Векторная физическая величина, обозначаемая как $\vec{a}$.
3. Вектор, начало и конец которого совпадают. (прил.)
5. Существуют 2 … сложения векторов. (ед. ч.)
6. Слово, связанное с темой занятия.
7. Векторная физическая величина, характеризующая быстроту перемещения и направление движения материальной точки в пространстве относительно выбранной системы отсчёта.
9. Если $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$, то он равен 0^0, если $\vec{a} \perp \vec{b}$. то он равен 90^0. Что это?

Пример выполнения теста по теме «Координаты и векторы»

№1. Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если *A(2;-1;3)* и *B(4;-2;3)*

Решение (ис:$\overrightarrow{AB} = (2;-1;0)$ и $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$

$a)\ \sqrt{2} b)\ 4 \quad c)\ \sqrt{\mathbf{5}} d)\ \frac{3}{4}$

№ 2. Найти координаты т. M – середины отрезка AB, если*A (-2;4;1)* и *B(-5;8;0).*

Решение:$x_M = \frac{-2-5}{2} = -3{,}5 \quad y_M = \frac{4+8}{2} = 6 \quad z_M = \frac{1+0}{2} = 0{,}5$

a) M (0;-2,5;1) b) M (-3,5;2,5;0) c) **M (-3,5;6;0,5)** d) M (1;6;0,5)

№ 3.Найти$3\vec{a} + 2\vec{b}$, если*a = (1;-2;3), b = (-4;-8;7)*

Решение:$3\vec{a} + 2\vec{b} = (3 \cdot 1; 3 \cdot (-2); 3 \cdot 3) + (2 \cdot (-4); 2 \cdot (-8); 2 \cdot 7) = (-5; -22; 23)$

a) (-5;22;12) b) (3;-22;24) c) (-3,5;6;0,5) **d) (-5;-22;23)**

№ 4. Найти скалярное произведение векторов *a = (-5;2;7), b = (4;-3;8)*

Решение:$\vec{a} \cdot \vec{b} = -5 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) + 7 \cdot 8 = 30$

a) -28; b) -5; c) 14 **d) 30**

№ 5. Найти косинус угла между векторами $\vec{a} = (1;2;3)$ и $\vec{b} = (6;4;-2)$

Решение:

$$\cos\gamma = \frac{6+8-6}{\sqrt{1+4+9}\sqrt{36+16+4}} = \frac{8}{\sqrt{14*56}} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$$

$a)\ \mathbf{\frac{2}{7}} b)\ \frac{\sqrt{2}}{2} c)\ \sqrt{5} d)\ \frac{1}{2}$

Тест 73-74 по теме «Координаты и векторы»

Вариант 1

№ 1. Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если А(-2;-3;1) и В(5;8;4)

$a)\ \sqrt{182}b)\ 14\quad c)\ \sqrt{\mathbf{179}}d)\ 125{,}2$

№ 2. Найти координаты т. М – середины отрезка АВ, если А (8;-4;1) и В(-7;-1;-5).

а) **М (0,5;-2,5;-2)**b) М (-3,5;2,5;0) c)М (0;-2,5;1) d) М (1;6;0,5)

№ 3. Найти $4\vec{a}+3\vec{b}$, если $\vec{a} = (2;-3;2)$, $\vec{b} = (1;-4;3)$.

а) (-5;22;12) b) **(11;-24;17)** c) (-3,5;6;0,5) d) (-11;12;17)

№ 4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = (-5;2;7), \vec{b} = (4;-3;8)$

а) -46; b) -5; c) 14 d) **30**

№ 5. Найти косинус угла между векторами $\vec{a} = (-2;3;-1), \vec{b} = (1;3;2)$

$a)\ \mathbf{\frac{5}{14}}b)\ \frac{\sqrt{2}}{2}c)\ \sqrt{5}d)\ \frac{2}{7}$

Вариант 2

№ 1. Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если А(-4;-3;1) и В(6;9;5)

$a)\ \sqrt{\mathbf{260}}b)\ 18\quad c)\ \sqrt{118}d)\ 131{,}2$

№ 2. Найти координаты т. М – середины отрезка АВ, если А (7;1;5) и В(-8;4;-1).

а) М (0;-2,5;1) b) **М (-0,5;2,5;2)** c) М (0,5;-2,5;-2) d) М (1;6;0,5)

№ 3. Найти $4\vec{a}+3\vec{b}$, если $\vec{a} = (-1;4;-3)$, $\vec{b} = (-2;3;-2)$.

а) (10;25;18) b) (3;-22;24) c) **(10;25;6)** d) (11;0;17)

№ 4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = (-2;-3;1), \vec{b} = (-5;8;-4)$

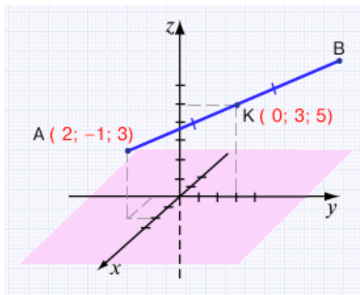
а) 64; b) -51; c) 14 d) **-18**

№ 5. Найти косинус угла между векторами $\vec{a} = (-4;3;-5), \vec{b} = (-5;-3;4)$

$a)\ -\frac{12}{71}b)\sqrt{15}c)\ -\mathbf{\frac{9}{50}}d)\ \frac{15}{17}$

Образцы решения задач

1. Точка К – середина отрезка АВ. Найти длину отрезка АВ, если даны координаты точек А и К.



Решение : $B(x_2;y_2;z_2)$ так как К-середина АВ,

то $0=\frac{2+x_2}{2} \Rightarrow x_2=-2$, $3=\frac{-1+y_2}{2} \Rightarrow y_2=7$, $5=\frac{3+z_2}{2} \Rightarrow z_2=7$,

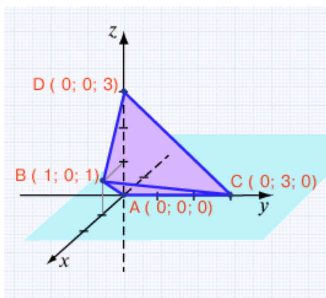
тогда $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2-2)^2+(7+1)^2+(7-3)^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$

2. Даны два вектора $\vec{a} = (3;-2;7), \vec{b} = (6;0;4)$. Найти длину вектора $\vec{c} = 0{,}5\vec{b} - 2\vec{a}$.

Решение: Так как $0{,}5\vec{b} = (3;0;2)$, $2\vec{a} = (6;-4;14)$, то $\vec{c} = (-3;4;-12)$,

соответственно $|\vec{c}| = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$

3. Чему равен косинус угла между ребрами АВ и CD тетраэдра ABCD, если известны координаты его вершин?



Решение: Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}(1;0;1)$ и $\overrightarrow{CD}(0;-3;3)$

$$\cos\gamma = \frac{0+0+3}{\sqrt{2}\sqrt{9+9}} = \frac{3}{\sqrt{36}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

4. Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(1;2;3)$ и $B(-4;-5;4)$

Решение: $\overrightarrow{AB}(-5;-7;1)$ и $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{25+49+1} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

5. Перпендикулярны ли векторы $\vec{m} = (2;-3;4)$ и $\vec{n} = (-3;-2;-2)$?

Решение: $\vec{m}\vec{n} = -6+6-8 = -8$ **Ответ:** нет, не перпендикулярны

6. Найти косинус угла между векторами $\vec{a} = (3;1;-2)$ и $\vec{b} = (2;-6;4)$

Решение:

$$\cos\gamma = \frac{6-6-8}{\sqrt{9+1+4}\sqrt{4+36+16}} = -\frac{8}{\sqrt{14*56}} = -\frac{8}{28} = -\frac{2}{7}$$

7. Найти длину вектора $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$, если $\vec{a} = (2;4;8)$ и $\vec{b} = (-3;1;4)$

Решение:

Пусть $\vec{c} = \vec{a}-\vec{b}$, тогда $\vec{c} = (5;3;4)$ и $|\vec{c}| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{25+9+16} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

8. Вычислить скалярное произведение векторов $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)*2\vec{b}$, если $\vec{a} = (1;-3;2)$, $\vec{b} = (-1;4;3)$

Решение: $\vec{a}-\vec{b} = (2;-7;-1)$ и вектор $2\vec{b} = (-2;8;6)$, скалярное произведение векторов $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)*2\vec{b} = 2*(-2)+(-7)*8+(-1)*6 = -4-56-6 = -66$

9. Найти угол между векторами $2\vec{a}$ и $\vec{b}/2$, если $\vec{a} = (-4;2;4)$, $\vec{b} = \left(\sqrt{2};-\sqrt{2};0\right)$

Решение: $2\vec{a} = (-8;4;8)$ и $\frac{\vec{b}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{-\sqrt{2}}{2};0\right)$

$$\cos\gamma = \frac{-8*\frac{\sqrt{2}}{2}+4*\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)+8*0}{\sqrt{64+16+64}\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}+0}} = \frac{-6\sqrt{2}}{\sqrt{144}} = \frac{-6\sqrt{2}}{12} = \frac{-\sqrt{2}}{2},$$ соответственно

$\gamma = {}^{3\pi}\!/_{4} = 135^0$

Практическая работа № 75-76 по теме «Координаты и векторы»

Вариант А

№ 1. Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если А (2;-1;3) и В(4;-2;3). **Ответ**: $\sqrt{5}$

№ 2. Проверить перпендикулярность векторов:

а) $\vec{m} = (1; -3; 0)$ и $\vec{n} = (4; 1; -2)$ б) $\vec{c} = (-4; -3; 1)$ и $\vec{d} = (3; 1; 15)$

Ответ: а) не перпендикулярны; б) перпендикулярны.

№ 3. Найти косинус угла между векторами $\vec{a} = (1; 2; 3)$ и $\vec{b} = (6; 4; -2)$?**Ответ**: $\cos\varphi = \frac{2}{7}$

№ 4. Найти координаты т. М – середины отрезка АВ, если А(2;-1;3) и В(4;-2;3).

Ответ: М(3;-1,5;3).

№ 5. Найти координаты вектора $3\vec{a} + 2\vec{b}$, если $\vec{a} = (1; 3; 0)$ и $\vec{b} = (-2; -1; 5)$?

Ответ:$3\vec{a} + 2\vec{b} = (-1; 7; 10)$

Вариант В

№ 1. Найти длину вектора $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$, если $a = (3; -5; 8)$ и $\vec{b} = (-1; 1; -4)$?**Ответ**: 6

№ 2. Чему равно скалярное произведение векторов $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \vec{a}$, если $\vec{a} = (6; -2; 1)$ и

$\vec{b} = (-3; 1; 4)$?**Ответ**: 9

№ 3. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $2\vec{b}$, если $\vec{a} = (3; 1; 2), \vec{b} = (1; 1{,}5; 0{,}5)$.

Ответ: $\cos\varphi = \frac{11}{14}$

№ 4. Найти периметр треугольника АВС, если А(10;-2;8), В(8;0;7), С(10;2;8).

Ответ: 10.

№ 5. Дан треугольник АВС. А(10;1;4), В(8;5;4), С(10;3;2). Найти длину медианы AN.

Ответ: $|AN| = \sqrt{11} \approx 3.32$.

Вариант С

№ 1. Найти длину вектора $\left|2\vec{a} + 3\vec{b}\right|$, если $\vec{a} = (1; 2; -1), \vec{b} = (-2; 1; 0)$.**Ответ**: $\sqrt{69}$

№ 2. Найти скалярное произведение векторов $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$, если $\vec{a} = (1; 0; 1)$, $\vec{b} = (3; 2; 1)$. **Ответ:** –30

№ 3. Найти угол между векторами $2\vec{a}$ и $\frac{\vec{b}}{2}$, если, $\vec{a} = (-4; 2; -4), \vec{b} = (-\sqrt{2}; \sqrt{2}; 0)$.

Ответ: $\varphi = \frac{\pi}{4}$

№ 4.Точка N(1;4;3) – середина отрезка АВ. Найти длину отрезка АВ, еслиА(-1;2;-2).

Ответ: $|AN| = \sqrt{132} \approx 11.49$.

№ 5.Чему равен косинус угла между ребрами АВ и CD призмы ABCD, еслиA(0;0;0), B(1;0;0), C(1;1;0), D(2;2;4)?

Ответ: $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{18}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$

Дополнительные задания.

1. Найдите координаты точки N, если вектор $\overrightarrow{MN} = (4; -3; 0)$и точка M(1;-3;-7).
Ответ: N(5;-6;-7).

2. При каком значении z векторы $\vec{a} = (3; -5; z)$и $\vec{b} = (-4; -2; 1)$ перпендикулярны?
Ответ: z=2.

3. Докажите, что в треугольнике ABC, где A(2;1;3), B(1;1;4), C(0;1;3), угол B – прямой.

4. На оси ординат найдите точку, равноудаленную от точекA(1;2;3), B(-2;-3;5).
Ответ: O(0;-2,4;0)

5. При каком значении t вектор $2\vec{a} + t\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{b} - \vec{a}$, если $\vec{a} = (2; -1; 0), \vec{b} = (4; 3; 1)$?
Ответ: при t =0.

6. Докажите, что четырехугольник с вершинами A(1;4;3), B(2;3;5), C(2;5;1), D(3;4;3) – параллелограмм.

Контрольные вопросы к зачету

1. Что такое вектор?
2. Как он обозначается
3.Изобразите векторы (не менее трех). Укажите начало и конец векторов.
4.Какой вектор называется нулевым?
5. Какие векторные физические величины вы знаете?
6. Какие вектора называются равными? Изобразите два равных вектора.
7. Как отложить вектор от данной точки?
8. Как сложить два вектора? Более двух векторов? Как построить разность двух векторов? Рассмотреть правило треугольника, параллелограмма, многоугольника.
9. Как вычислить координаты вектора, если известны координаты начальной и конечной точки?
10. Как умножить вектор на число, если известны его координаты?
11. Как вычислить длину вектора, если известны его координаты?
12. Что такое скалярное произведение векторов?
13. Как найти скалярное произведение векторов, если известны координаты векторов?
14. Как найти косинус угла между векторами, если известны координаты векторов?
15.Что называют движением пространства?
16.Привести примеры движения(определение, формула, задающая тот или иной вид движения, рисунок). На выбор(не менее двух).

Контрольная работа по теме «Координаты и векторы»

Вариант 1	**Вариант 2**	**Вариант 3**
1.Даны векторы $\vec{a}$ {2; –5; –4}, $\vec{b}$ {–4; 3; –3}. а) Будут ли коллинеарными векторы $\vec{c} = 2\vec{a} - 4\vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b}$? б) Вычислите $\left\| 2\vec{c} - 3\vec{d} \right\|$.	**1**.Даны векторы $\vec{a}$ {2; –5; –4}, $\vec{b}$ {–2; 2; –4}. а) Будут ли коллинеарными векторы $\vec{c} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b}$? б) Вычислите $\left\| 2\vec{c} - 3\vec{d} \right\|$.	**1**.Даны векторы $\vec{a}$ {2; –5; –4}, $\vec{b}$ {–2; 2; –3}. а) Будут ли коллинеарными векторы $\vec{c} = 2\vec{a} - 4\vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b}$? б) Вычислите $\left\| 2\vec{c} - 3\vec{d} \right\|$.
2.*A*(1; 6; –3), *B*(–5; 3; –5), *C*(3; –1; 1). а) Найдите координаты вершины *D* параллелограмма *ABCD*. б) На оси аппликат найдите точку, равноудаленную от точек*B* и *C*.	**2**.*A*(1; 5; –2), *B*(–5; 4; –5), *C*(1; –4; 1). а) Найдите координаты вершины *D* параллелограмма *ABCD*. б) На оси абсцисс найдите точку, равноудаленную от точек*B* и *C*.	**2**.*A*(3; 7; –2), *B*(–5; 4; –5), *C*(1; –2; 1). а) Найдите координаты вершины *D* параллелограмма *ABCD*. б) На оси аппликат найдите точку, равноудаленную от точек*B* и *C*.
3.Докажите, что *ABCD* — прямоугольник, если*A*(4; –2; 2), *B*(6; 1; –4), *C*(0; –1; –7), *D*(–2; –4; –1).	**3**.Докажите, что *ABCD* — квадрат, если *A*(–3; –4; 5), *B*(–2; 0; –3), *C*(2; 7; 1), *D*(1; 3; 9).	**3**.Докажите, что *ABCD* — ромб, если *A*(9; 2; 8), *B*(5; 3; –2), *C*(–3; –4; –4), *D*(1; –5; 6).

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2	ВАРИАНТ 3
б) 15	б) 14	б) 11
а) (9; 2; 3) б) (0; 0; –4)	а) (7; –3; 4) б) (–4; 0; 0)	а) (9; 1; 4) б) (0; 0; –5)
кв. диагонали 98 ед^2	кв. диагонали 162 ед^2 сторона 9 ед	кв. стороны 117 ед^2

Основные источники:

1. Атанасян Л.С. и др. Геометрия. Учебник для общеобразовательных учреждений 2001- 206с.

Дополнительные источники:

1.Александров А.Д. и др. Геометрия. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений – М.: «Просвещение» 1998- 269с

1. Кисилев А.П. Геометрия. Планиметрия, стеереометрия: учебник. –М.: Физматлит, 2004 – 328 с.
2. Александров А.Д. и др. Геометрия. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений – М.: «Просвещение» 1998- 269с .

Интернет-ресурсы:

1. http://standart. Edu.ru./catachment. Aspx? CatalogId=223 (сайт «Федеральный государственный образовательный стандарт»)
2. http:// www. Shool. Edu.ru –Российский общеобразовательный портал
3. http:// www. Pedlib. Ru/- педагогическая библиотека
4. http:// www.inter-pedagogika/ru - сайт создан для преподавателей, родителей и студентов.