Урок43-44: Простейшие тригонометрические уравнения

ХОД УРОКА:

1. Подготовка к восприятию нового материала начинается с устной работы с классом

а) Найти значение тригонометрических функций, если известен угол:

$\sin\frac{\pi}{3}; \cos\frac{\pi}{6}; tg\frac{\pi}{4}; \sin\frac{\pi}{2}; \cos\pi; ctg\frac{\pi}{6}$

б) Обратная задача: найти $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}; \arccos\left(-\frac{1}{2}\right); arctg1; \arcsin(-1); arcctg\frac{\sqrt{3}}{3}$.

в) Как называется число, которое обращает уравнение в верное числовое равенство? (подошли к теореме о единственности корня.

г) Можно эту теорему доказать, можно дать только формулировку, это зависит от уровня математической подготовленности класса.

2. Объяснение нового материала:

1. Тема урока, введение

Решение всех **тригонометрических уравнений**, как правило, сводится к решению простейших тригонометрических уравнений. Им и посвящен этот урок.

2. Решение уравнения cos t=a, частные случаи

б) для графика функции *y = cos x* это промежуток $[0;\pi]$, где функция убывает. Рассмотрим уравнение *cos x = a*. Какие значения может принимать «а»? *(| a | ≤ 1)*. На экране высвечивается графики функций *y = cos x* и *y = a*, рассматривается решение тригонометрического уравнения *cos x = a.*

$$X = \pm\arccos a + 2\pi\kappa, \kappa\in Z$$

ИСКЛЮЧЕНИЕ: cos x = 0, то x = $\frac{\pi}{2} + \pi\kappa, \kappa\in Z$

cos x = -1, то x = $\pi + 2\pi\kappa, \kappa\in Z$

cos x = 1, то x = $2\pi\kappa, \kappa\in Z$

Например:

а) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

б) $\cos x = -\frac{1}{2}$

в) $\cos x = \frac{3}{5}$ (не табличное значение)

г) $\cos x = -1{,}25$ (нет корней т.к. 1.25 >1).

Вспомним решение уравнения $cost = a$ (рис. 1).

Если $|a| \leq 1,$ то $cost = a \iff t = \pm arccosa + 2\pi n, n \in Z.$

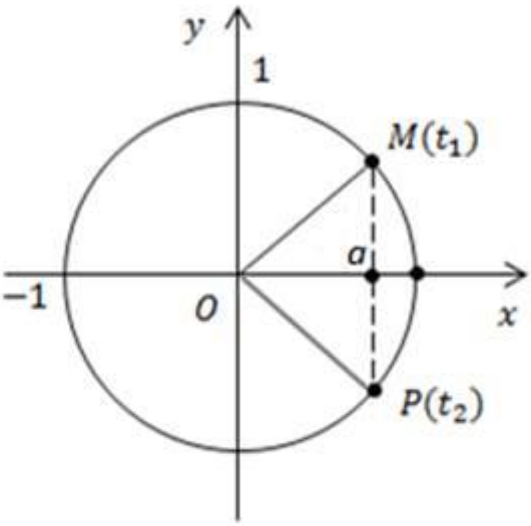

Рис. 1

$t_1 = arccosa + 2\pi n, \ \ n \in Z; t_2 = -arccosa + 2\pi n, n \in Z;$

$t = \pm arccosa + 2\pi n, n \in Z.$

Рассмотрим частные случаи уравнения $cost = a.$

1. $cost = 0 \iff t = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$

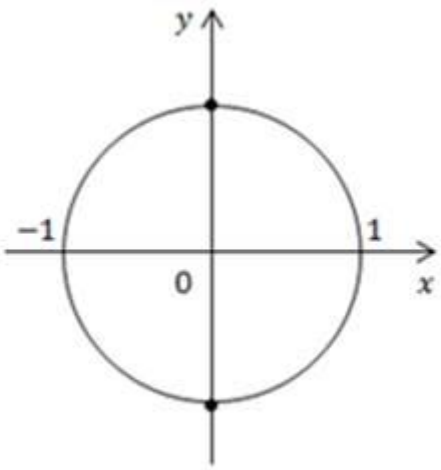

Рис. 2

2. $cost = 1 <=> t = 2\pi n, n \in Z.$

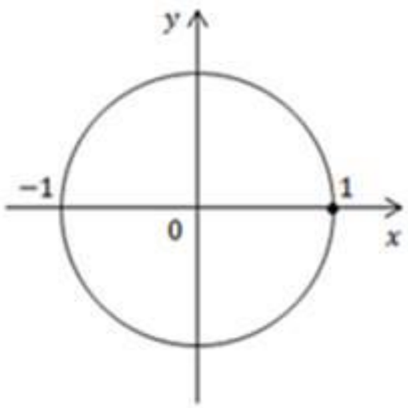

Рис. 3

3. $cost = -1 <=> t = \pi + 2\pi n, n \in Z.$

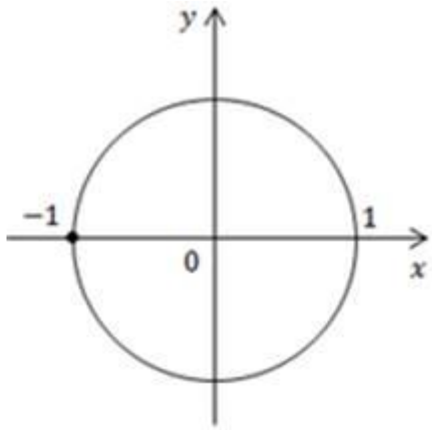

Рис. 4

3. Пример

Пример 1. Решить систему $\begin{cases} cost = -\frac{1}{2}, \\ ctgt < 0. \end{cases}$

Решение (рис. 5):

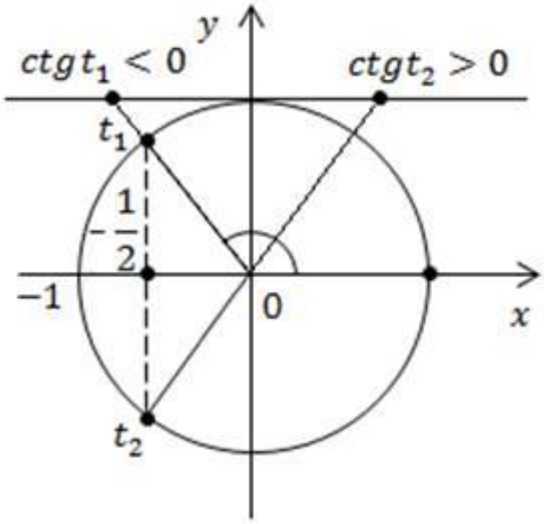

Рис. 5

$$cost = -\frac{1}{2} <=> \left[\begin{array}{l} t_1 = arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \\ t_2 = -arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in Z.$$

t_2 не подходит, т.к. $ctgt_2 < 0.$

Ответ: $t = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ \ n \in Z.$

Урок45-46: Простейшие тригонометрические уравнения

Решение уравнения sint=a, частные случаи

для графика $y = sin\,x$ это промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (выбираем промежуток ближе к началу координат). Если есть уравнение $sin\,x = a$, то на этом промежутке есть одно число «b», удовлетворяющее данному уравнению $(x = b)$.

Вопрос к аудитории: Какие значения может принимать «а»?

Итак, еще раз повторим уравнение $sin\,x = a$ будет иметь корни тогда и только тогда, когда $/\,a\,/ \leq 1$. Решим уравнение $sin\,x = a$ графическим способом, построим графики функций $y = sin\,x$ и $y = a.$

Х = $(-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$

ИСКЛЮЧЕНИЯ: sin x = 0, то **x = *П*к, к** $\in Z$

sin x = - 1, то x = - $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

sin x = 1, то x = $\frac{\pi}{2} + 2\pi \kappa, \kappa \in Z$

Например: Решить уравнения:

а) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

б) $\sin x = \frac{2}{7}$ (не табличное значение),

в) $\sin x = 2{,}1$ (нет корней т.к. 2,1>1)

г) $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Рассмотрим решение уравнения $sint = a$ (рис. 6).

Если
$|a| \leq 1$, то $sint = a \;<=>\; t_1 = arcsina + 2\pi n, t_2 = \pi - arcsina + 2\pi n, n \in Z.$

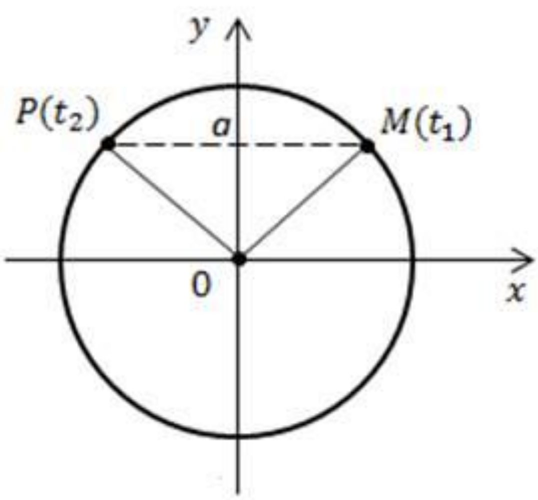

Рис. 6

$$t = (-1)^k arcsina + \pi k, k \in Z.$$

Рассмотрим частные случаи уравнения $sint = a.$

1. $sint = 0 <=> t = \pi n, n \in Z.$

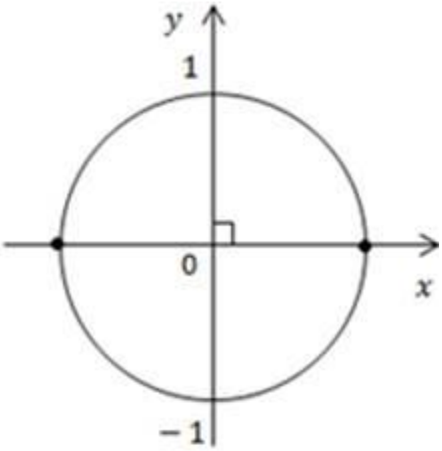

Рис. 7

2. $sint = 1 <=> t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

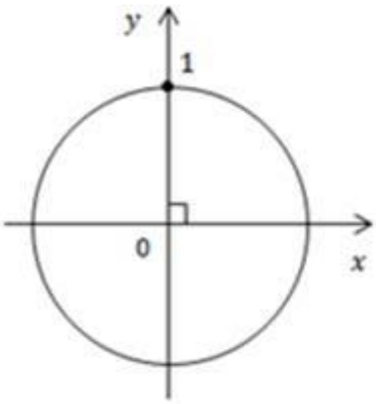

Рис. 8

3. $sint = -1 <=> t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

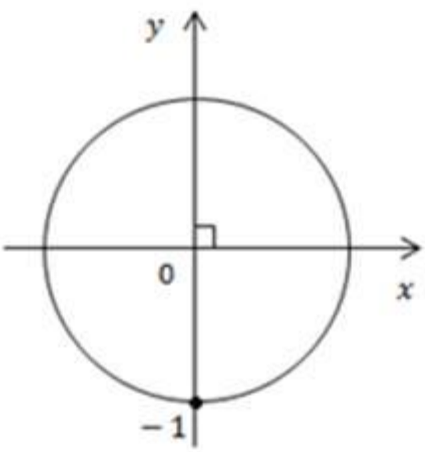

Рис. 9

5. Пример

Пример 2. Решить систему $\begin{cases} sin3t = \frac{1}{2}, \\ cos3t < 0. \end{cases}$

Решение:

Произведём замену переменной: $3t = u.$

$$\begin{cases} sinu = \frac{1}{2}, \\ cosu < 0; \end{cases}$$

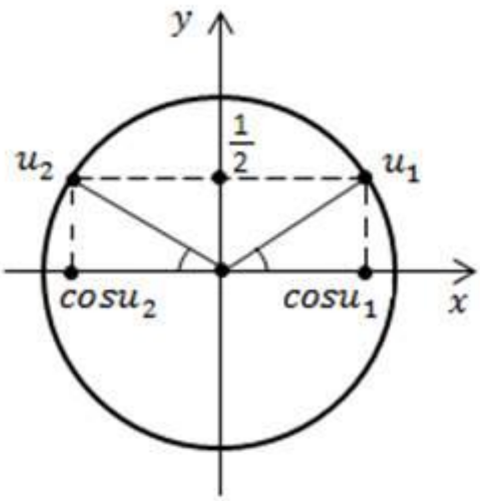

Рис. 10

$$u_1 = arcsin\frac{1}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$u_2 = \pi - arcsin\frac{1}{2} + 2\pi n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

u_1 не подходит, т.к. $cosu_1 > 0.$

$$u = 3t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$t = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z.$$

Ответ: $\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z.$

Урок47-48: Простейшие тригонометрические уравнения

Решение уравнений tgt=a, ctgt=a

рассмотрим последние два тригонометрических уравнения *tg x = a* и *ctg x = a*. Функция *y = tg x* – возрастает на всей своей области определения. Для уравнения *tg x = a* рассматривается промежуток $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Учащиеся могут самостоятельно записать корень данного уравнения х = $arctga+\pi k, k\in Z$. Функция *y = ctg x* - убывает на всей своей области определения и для уравнения *ctg x = a* рассматривается промежуток $(0;\pi)$, х = $arcctga+\pi k, k\in Z$. Исключений для этих двух тригонометрических уравнений – нет. Графический способ решения уравнений *tg x = a* и *ctg x =a* позднее показать на экране:

Например:

а) $tgx=\sqrt{3}$

б) $tgx=-5$

в) $ctgx=-1$

г) $ctgx=2$

Рассмотрим решение уравнений $tgt = a$ и $ctgt = a$.

$$tgt = a \iff t = arctga + \pi n, n \in Z;$$
$$ctgt = a \iff t = arcctga + \pi n, n \in Z.$$

Может ли уравнение *tg x = a* не иметь корней?

7. Пример

Пример 3: Решить систему $\begin{cases} tgt = 2, \\ cost < 0. \end{cases}$

Решение (рис. 11).

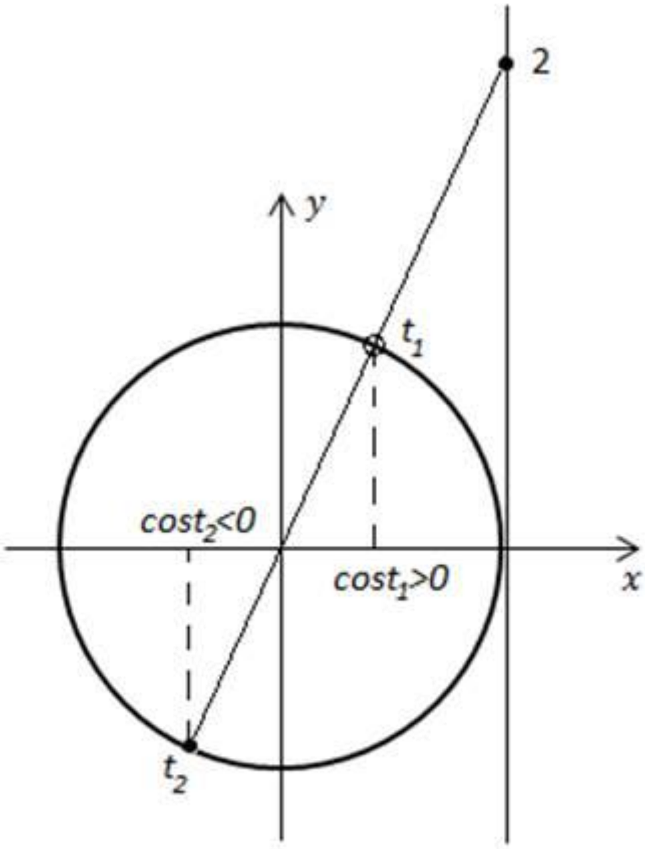

Рис. 11

$t_1 = arctg2 + 2\pi n, n \in Z;$

$t_2 = arctg2 + \pi + 2\pi n, n \in Z.$

t_1 не подходит, т.к. $cost_1 > 0.$

Ответ: $t = arctg2 + \pi(2n + 1),\ n \in Z.$